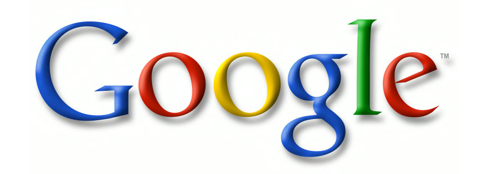
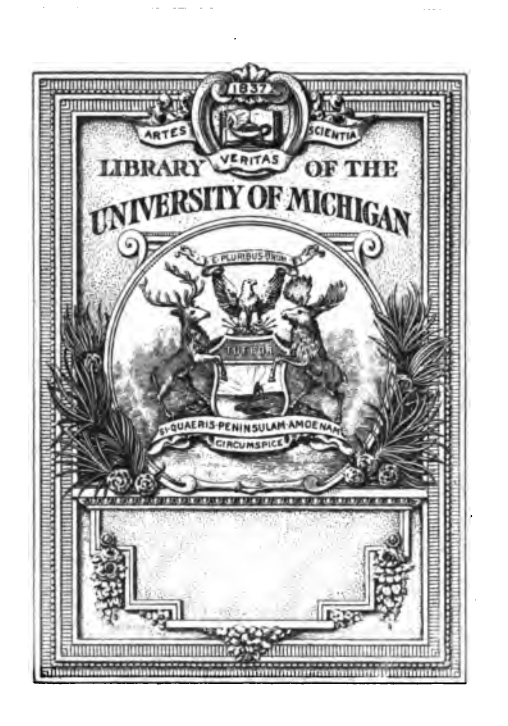



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne,

VAZEILLE
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME TROISIÈME



Année 1884.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

COMITÉ DE RÉDACTION

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

LQUES INÉGALITÉS

Laguerre.

2, ..., α_n désignant n quantités

$$\ldots \alpha_n \geq n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Cette propositi ... dente si n est égal à deux; je me propose de faire ... si elle est vr ... $= k$, elle est encore vraie p ... I; elle s ... dans toute sa générali ...

Je remarque, à ... le théo ... s'énoncer ainsi :

Si l'équation Ax^k ... réelles négatives, on ... $+$

Cela posé, en désigna ... tités positives, considéron ...

$$\frac{1}{x} \ldots \frac{1}{\ldots + \alpha_2} \ldots$$

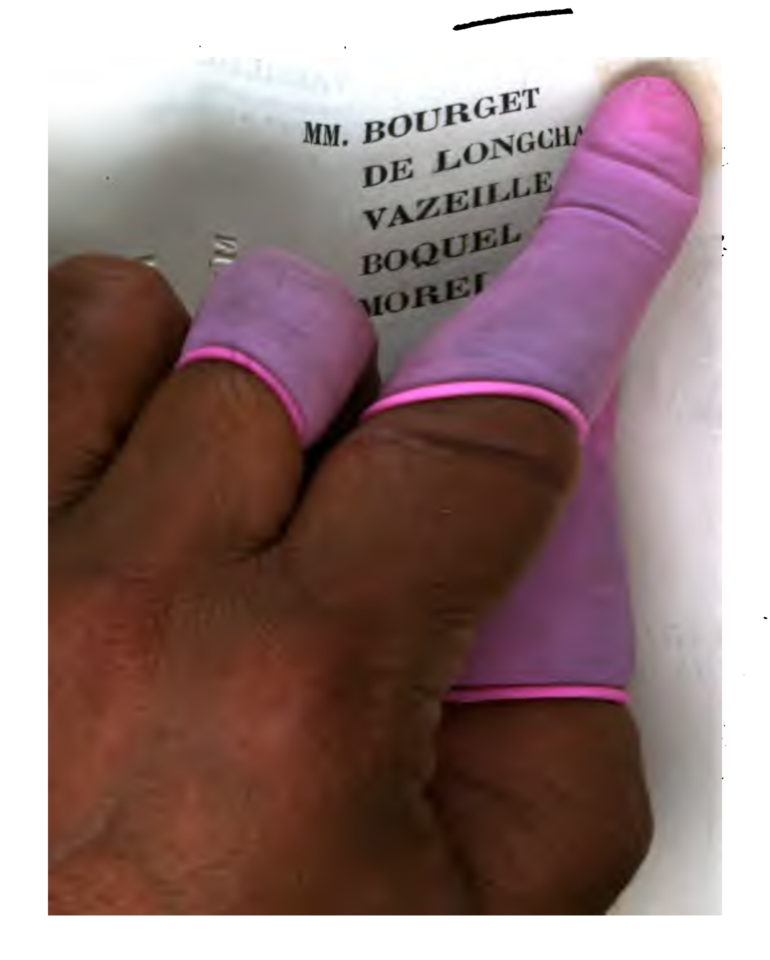
on sait qu ... mettant sous ...

$(k+1)x$ ...

$+ \alpha_1\alpha_2 \ldots$

La proposition ét ...

COMITÉ DE R



MM. BOURGET
DE LONGCHA
VAZEILLE
BOQUEL
MOREI

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

NOTE SUR QUELQUES INÉGALITÉS

Par M. Laguerre.

1. — On sait que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant n quantités positives, on a l'inégalité

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geq n \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Cette proposition est évidente si n est égal à deux; je me propose de faire voir que, si elle est vraie pour $n = k$, elle est encore vraie pour $n = k + 1$; elle sera ainsi établie dans toute sa généralité.

Je remarque, à cet effet, que le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Si l'équation $Ax^k + Bx^{k-1} + \ldots + L = 0$, a k racines réelles négatives, on a

$$B \geq k \sqrt[k]{LA^{k-1}}.$$

Cela posé, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$, $k + 1$ quantités positives, considérons l'équation

$$\frac{1}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x + \alpha_{k+1}} = 0;$$

on sait qu'elle a k racines réelles et négatives et, en la mettant sous forme entière, elle devient

$$(k + 1)x^k + k(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1})x^{k-1} + \ldots$$
$$+ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right) = 0.$$

La proposition étant supposée vraie pour k quantités, on a

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}}{} \geq \sqrt{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)(k+1)^{k-1}},$$

ou, en élevant les deux nombres à la puissance k,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1})^k \geq (k+1)^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}. \quad (1)$$

Changeons, ce qui est évidemment permis, les α_i en $\frac{1}{\alpha_i}$, il vient

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)^k \geq (k+1)^{k-1}\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}} \quad (2)$$

et, mulipliant les inégalités (1) et (2) après avoir élevé les deux termes de la première à la puissance k,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1})^{k^2} \geq (k+1)^{k^2-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1})(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1})^{k-1};$$

d'où, en réduisant et extrayant la racine $(k^2 - 1)^{\text{me}}$ des deux membres

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} \geq (k+1)\sqrt[k+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}.$$

2. — Plus généralement, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ désignant $n + 1$ quantités positives arbitraires, considérons l'équation

$$\frac{A_1}{x+\alpha_1} + \frac{A_2}{x+\alpha_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{x+\alpha_{n+1}} = 0, \quad (3)$$

où les A_i désignent des quantités positives.

Cette équation a toutes ses racines réelles et négatives; en la mettant sous forme entière, elle peut s'écrire

$$(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})x^n + [(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_{n+1}) - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1})]x^{n-1} + \dots + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1}\left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) = 0.$$

En appliquant la proposition précédente, on obtient l'inégalité suivante,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} - \frac{A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1}}}{} \geq n\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1}}\left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)}, \quad (4)$$

qui renferme l'inégalité précédente comme cas particulier, quand on y fait

$$A_1 = A_2, \ldots = A_n = 0,$$

et

$$A_{n+1} = 1.$$

Elle a lieu pour toutes les valeurs positives des quantités α_i et A_i et donne lieu à quelques applications intéressantes quand on particularise ces constantes, en faisant, par exemple,

$$\alpha_i = a_i^p \quad \text{et} \quad A_i = a_i^q,$$

les α_i désignant des quantités positives arbitraires, p et q désignant deux nombres réels quelconques.

3. — L'inégalité (4) ne suppose pas du reste expressément que toutes les quantités A_i soient positives ; il suffit que l'équation (3) ait toutes ses racines réelles et négatives ; c'est ce qui aura lieu si les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant supposées rangées par ordre croissant de grandeur, la suite des nombres $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, ne présente qu'une variation et si le produit

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})\left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)$$

est positif.

L'inégalité (4) subsiste donc encore dans ce cas.

4. — J'ajouterai encore une dernière remarque sur l'inégalité (4) où tous les A_i et les α_i désignent des quantités positives.

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned}[(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1}) \\ - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{n+1}\alpha_{n+1})]^n \\ \geq n^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1} (A_1 + A_2 \ldots + A_{n+1})^{n-1} \left(\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Or on a

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1})^{n-1} \geq (n+1)^{n-1}(A_1A_2 \ldots A_{n+1})^{\frac{n-1}{n+1}}$$

et

$$\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \geq (n+1)\left(\frac{A_1A_2 \ldots A_{n+1}}{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

En multipliant ces diverses inégalités, il vient

$$[(A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}) - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1})]^n$$
$$\geq n^n(n + 1)^n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1})^{\frac{n}{n+1}}(A_1A_2 \dots A_{n+1})^{\frac{n}{n+1}},$$

d'où encore

$$(A_1 + A_2 \dots + A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}) - (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1})$$
$$\geq n(n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} . A_1A_2 \dots A_{n+1}},$$

qui donne la formule de Cauchy si l'on y fait

$$A_1 = A_2 \dots = A_{n+1} = 1.$$

On peut mettre encore cette inégalité sous la forme suivante :

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1}$$
$$\leq (A_1 + A_2 \dots A_{n+1})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1})$$
$$- n(n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} . A_1A_2 \dots A_{n+1}} \quad . \quad (5)$$

Cette formule est remarquable en ce que le second membre est symétrique par rapport aux A_i et aux α_i.

On a d'ailleurs

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 \dots + A_{n+1}\alpha_{n+1} \geq (n + 1) \sqrt[n+1]{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} . A_1A_2 \dots A_{n+1}} \quad (6)$$

NOTE D'ANALYSE

Par M. S. Réalis.

1° Démontrer que si le nombre entier $x > 1$ *est de l'une des formes* $5p + 1$, $5p + 3$, *le nombre triangulaire* $\frac{(x + 1)x}{2}$ *est égal à la somme de deux nombres triangulaires, et que si* x *appartient à l'une des formes* $5p$, $5p + 2$, $5p + 4$, *il existe une infinité de valeurs de* $\frac{(x + 1)x}{2}$ *qui sont la somme de deux nombres triangulaires.*

2° Assigner, par une formule unique, une infinité de nombres triangulaires, tels que 6, 21, 36, 55, 66, 91, 120, 136, 171,

231, 276,..., 7140,..., 12720,..., 21945,..., *qui soient égaux, chacun, à une somme de deux nombres triangulaires.*

On a les identités

$$\frac{(5p+2)(5p+1)}{2} = \frac{(4p+2)(4p+1)}{2} + \frac{(3p+1).3p}{2},$$

$$\frac{(5p+4)(5p+3)}{2} = \frac{(4p+3)(4p+2)}{2} + \frac{(3p+3)(3p+2)}{2},$$

desquelles il résulte que, pour $x = 5p + 1$, et pour $x = 5p + 3$, le nombre triangulaire $n = \frac{(x+1)x}{2}$ est la somme de deux triangulaires.

L'identité

$$\frac{(x+1)x}{2} = x + \frac{x(x-1)}{2},$$

en y faisant $x = \frac{5h(5h \pm 1)}{2}$, nous fait voir ensuite qu'il existe une infinité de valeurs de x, de la forme $5p$, pour lesquelles n est une somme de deux triangulaires.

L'identité

$$[2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + \alpha + 1][2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + \alpha] = \frac{(2\alpha p + \alpha + 1)(2\alpha p + \alpha)}{2} + \frac{[2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p + 1][2\alpha p^2 + (2\alpha+1)p]}{2}, \quad (A)$$

où nous considérerons α comme un entier positif donné, et où nous attribuerons à p une infinité de valeurs entières divisibles par un entier donné $\beta > \alpha$, nous fait voir enfin que, pour toute forme linéaire $\beta p + \alpha$ dans laquelle x doive être compris (par exemple, pour les formes $5p + 2$, $5p + 4$ signalées dans l'énoncé), on peut assigner directement une infinité de valeurs de x, telles que $\frac{(x+1)x}{2}$ remplisse la condition assignée. Il est clair, du reste, que, pour toute valeur entière, et différente de zéro, attribuée à α et à p, la formule (A) produit un nombre triangulaire qui est la somme de deux autres nombres de même espèce.

Il est à observer cependant que la relation (A) ne four-

nit pas tous les nombres n susceptibles de la décomposition indiquée. Par exemple, elle ne donne pas les résultats

$$378 = 78 + 300,\ 820 = 190 + 630 = 495 + 325,$$
$$990 = 210 + 780,\ \text{etc.}$$

que l'on peut obtenir par d'autres formules.

LA MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Soient d, δ et D, trois déterminants du degré m ; D est formé par la règle suivante : l'élément de D, qui est dans la ligne p et dans la colonne r, est égal à la somme des produits des éléments de la ligne p dans d, respectivement multipliés par les éléments de la ligne r dans δ.

$$d = \begin{vmatrix} ab \ldots c \\ a'b' \ldots c' \\ \ldots \\ a''b'' \ldots c'' \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha\beta \ldots \gamma \\ \alpha'\beta' \ldots \gamma' \\ \ldots \\ \alpha''\beta'' \ldots \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta + \ldots + c\gamma & a\alpha' + b\beta' + \ldots + c\gamma' & \ldots \\ a'\alpha + b'\beta + \ldots + c'\gamma & a'\alpha' + b'\beta' + \ldots + c'\gamma' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a''\alpha + b''\beta + \ldots + c''\gamma & a''\alpha' + b''\beta' + \ldots + c''\gamma' & \ldots \end{vmatrix}$$

Il s'agit de démontrer que $D = d.\,\delta$.

Chaque colonne de D étant composée de m files verticales, D est décomposable en m^m déterminants élémentaires, dont chacun se déduit de D en y remplaçant chaque coonne par l'une des files verticales qu'elle comprend.

Un déterminant élémentaire est nul si, pour le former, on a pris dans deux colonnes de D des files de même rang : en effet, ces deux files sont composés d'éléments proportionnels.

Si, pour former un déterminant élémentaire, on a pris dans les colonnes de D des files de rang tous différents, ce déterminant élémentaire est le produit de d par un facteur qui ne dépend que des éléments de δ ; dès lors D, qui

est la somme des déterminants élémentaires, peut s'écrire

$$D = d \times \varphi\ (\alpha \ldots \gamma''). \qquad (1)$$

$\varphi\ (\alpha \ldots \gamma'')$ est un facteur qui ne dépend que des éléments de δ, et dont il s'agit de déterminer la valeur. Pour cela, on peut attribuer aux éléments de d telles valeurs que l'on veut, car φ n'en dépend pas ; si en particulier on remplace par l'unité chacun des éléments de la diagonale principale de d, et par des o tous les autres éléments, d devient égal à 1, D devient égal à δ, et comme φ n'a pas changé, l'égalité (1) devient

$$\delta = \varphi\ (\alpha \ldots \gamma''),$$

d'où

$$D = d\ .\ \delta\ ; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTE SUR LES COMBINAISONS COMPLÈTES

Par M. **Walecki**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet.

Soit à trouver le nombre de combinaisons complètes de m lettres p à p.

Si $a, b, \ldots l$ sont les m lettres, chaque combinaison peut être figurée par un monôme $a^\alpha, b^\beta, \ldots l^\gamma$, où $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sont m entiers, nuls ou positifs, dont la somme est égale à p; il y aura autant de combinaisons que de manières de partager p unités entre m nombres nuls ou positifs. — Pour figurer une de ces partitions, je dispose sur une ligne $m - 1$ signes de séparation : des o, par exemple, puis j'écris les unités de α avant le premier o; celles de β dans le premier intervalle et ainsi de suite, et enfin les unités de λ après le dernier o. Il n'y a rien à écrire pour un exposant qui serait nul. J'obtiens ainsi une suite, telle que : o. 1 1 o...o 1, formée de p unités et de $m - 1$ signes de séparation. Il y a autant de combinaisons que de suites de ce genre, et le nombre de ces suites est le nombre des permutations de $m + p - 1$ lettres dont p sont égales à l'unité, et $m - 1$ sont des o. Le nombre demandé est donc

$$\frac{(m + p - 1)!}{\overline{m - 1}!\, p!} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. B. Le Pont.

La méthode que nous proposons aujourd'hui pour la résolution de l'équation du quatrième degré consiste à exprimer linéairement ses racines en fonction de celles d'une équation bicubique.

Considérons l'équation

$$x^4 + 6px^2 + 4qx + r = 0. \qquad (1)$$

Posant

$$x = y + z, \qquad (2)$$

elle devient en développant et ordonnant par rapport à y :

$$y^4 + 4zy^3 + 6(z^2 + p)y^2 + 4(z^3 + 3pz + q)y + z^4 + 6pz^2 + 4qz + z = 0 \qquad (3)$$

Annulant les termes de degré impair :

$$zy^2 + z^3 + 3pz + q = 0, \qquad (4)$$

l'équation (3) se réduit à

$$y^4 + 6(z^2 + p)y^2 + z^4 + 6pz^2 + 4qz + r = 0. \qquad (5)$$

Remplaçant dans (5) y^2 par sa valeur de (4)

$$y^2 = -z^2 - 3p - \frac{q}{z}, \qquad (6)$$

nous obtenons la réduite

$$4z^6 + 12pz^4 + (9p^2 - r)z^2 + q^2 = 0. \qquad (7)$$

Désignant par z_1, z_2, z_3 et $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$ ses racines, nous avons

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -3p$$

$$z_1^2\, z_2^2\, z_3^2 = \frac{q^2}{4}.$$

Remplaçant dans la valeur (6) de y^2, z par $\varepsilon_1 z_1$, il vient

$$y = \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3, \qquad (8)$$

les ε désignant $+1$ ou -1. Par suite

$$x = \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3. \qquad (9)$$

Les quatre valeurs de x :

$$x_1 = -z_1 - z_2 - z_3,$$

$$x_2 = -z_1 + z_2 + z_3,$$

$$x_3 = + z_1 - z_2 + z_3,$$
$$x_4 = + z_1 + z_2 - z_3,$$

pour lesquelles le produit $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est négatif, sont les racines de l'équation proposée.

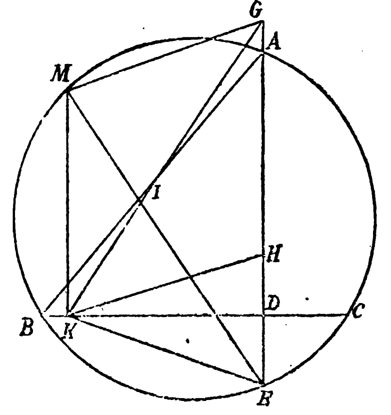
NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

Je me propose d'établir par la géométrie les propriétés les plus importantes que l'on connaît sur la droite de Simson, et quelques propriétés nouvelles.

Lemme. — Étant donné un triangle ABC, si du point A on abaisse la hauteur AB qui rencontre le cercle circonscrit au point E, le point de concours H des hauteurs du triangle ABC s'obtient en prenant DH = DE.

Étant donné un triangle ABC et un point M de la circonférence circonscrite à ce triangle, les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle sont sur une droite que j'appellerai *droite de Simson relative au point* M *et au triangle* ABC.



Théorème I. — *La droite de Simson relative à un point* M *et à un triangle* ABC *passe par le milieu de* MH, H *étant le point de concours des hauteurs du triangle* ABC.

A partir du point H, point de concours des hauteurs du triangle BAC, prenons HG égale à la perpendiculaire MK, et joignons KG, KH, KE, MG. La figure EKMG est un trapèze isoscèle, car les angles en E et G sont égaux à cause de DH = DE.

Dans ce trapèze on a

$$KGE = MEG.$$

Mais MEG est égal à MBA. Donc

$$KGE = MBA.$$

Donc

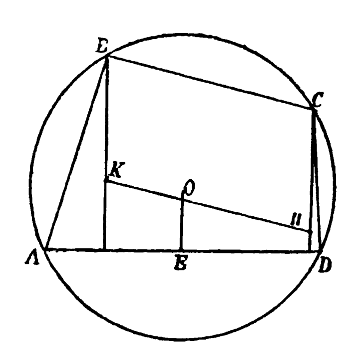
$$MBA = MKI.$$

Par suite, le quadrilatère MIKB est inscriptible, donc MIK est droit, et KIG est la droite de Simson relative à M et à ABC. Dans le parallélogramme MGHK, elle passe par le milieu de MH. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice.*

Il suffit de considérer la parabole ayant pour foyer M et inscrite au triangle ABC ; elle a pour tangente au sommet la droite de Simson KG; par suite, en vertu du théorème précédent, la directrice passe par H.

Théorème II. — *Étant donnés quatre points* A, B, C, D *d'une circonférence, les points de concours des hauteurs des triangles qu'on peut former avec ces points pris trois à trois, sont les sommets d'un quadrilatère égal à* ABCD.



On sait que la distance CH du point C au point de concours H des hauteurs du triangle ACD est double de la distance du centre O du cercle circonscrit au côté AD. Dès lors la droite KH, qui joint les points de concours des hauteurs du triangle ABD et du triangle ACD, est égale et parallèle à BC, et le théorème est démontré.

Les quatre points de concours des hauteurs H, K, L, M sont sur un cercle égal à celui des points donnés, et le centre de similitude des deux cercles est au milieu *commun* des quatre droites BH, CK, AL, DM.

Théorème III. — *Étant donnés quatre points* ABCD *d'une circonférence, les droites de Simson relatives à chacun des points et au triangle des trois autres concourent en un même point.*

Ce théorème est une conséquence des deux précédents.

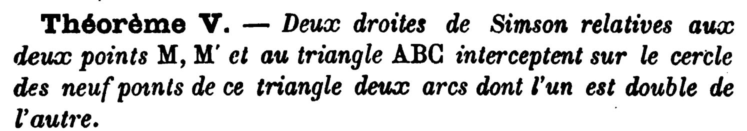
Théorème IV. — *L'angle de deux droites de Simson relatives à deux points* M *et* M′ *et à un triangle* ABC *est la moitié de l'angle* MOM′, O *étant le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Soient D, E, D′ E′ les projections de M et M′ sur BC et BA.

L'angle des droites DE, D′E′ est égal à la différence

$$MDE - M'D'E' = MBE - M'BE'.$$

Cette différence a pour mesure la moitié de l'arc MM′, ce qui démontre le théorème.



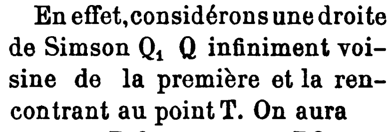
Théorème V. — *Deux droites de Simson relatives aux deux points* M, M′ *et au triangle* ABC *interceptent sur le cercle des neuf points de ce triangle deux arcs dont l'un est double de l'autre.*

En effet, le point H de concours des hauteurs du triangle ABC est un centre de similitude pour le cercle des neuf points et le cercle circonscrit, et les milieux de MH et M′H, qui sont des points P et Q des deux droites de Simson, sont sur le cercle des neuf points. L'arc PQ de ce dernier cercle est moitié de l'arc MM′. Les deux droites de Simson rencontrent encore le cercle des neuf points en P_1 et Q_1. L'angle des droites de Simson a pour mesure, d'une part, la demi-circonférence des arcs P_1Q_1 et PQ ; d'autre part, la moitié de l'arc PQ qui est moitié de MM′. Donc on a bien

$$\text{arc } P_1Q_1 = 2 . PQ.$$

Théorème VI. — *Étant donnée une droite de Simson relative au point* M *et au triangle* ABC, *si* P *est le point où elle rencontre* MH, *et si* P_1 *est le second point où elle rencontre le cercle des neuf points du triangle, on obtient le point* S *où la droite de Simson, variable avec* M, *touche son enveloppe, en portant sur* P_1P *une longueur* PS *égale à* P_1P.





En effet, considérons une droite de Simson Q_1 Q infiniment voisine de la première et la rencontrant au point T. On aura

$$\text{arc } P_1Q_1 = 2 \ . \ \text{arc } PQ.$$

On a

$$\frac{\text{corde } PQ}{\text{corde } P_1Q_1} = \frac{TP}{TQ_1}$$

A la limite, on a

$$\frac{TP}{TQ_1} = \frac{TP}{TP_1}$$

et

$$\frac{\text{corde } PQ}{\text{corde } P_1Q_1} = \frac{\text{arc } PQ}{\text{arc } P_1Q_1} = \frac{1}{2};$$

donc $TP = PP_1$ à la limite; C. Q. F. D.

Théorème VII. — *Soient* A *et* B *deux points fixes d'une circonférence, et* CD *une corde variable, telle que l'on ait*

$$\textit{arc } AC = k \ . \ \textit{arc } BD:$$

1° On obtient le point où CD *touche son enveloppe en portant sur* CD, *à partir de* D, *une longueur* $DS = \dfrac{DC}{k-1}$;

2° L'enveloppe de CD *est une hypocycloïde dans laquelle le rapport des rayons des circonférences est* $\dfrac{(k+1)}{(k-1)}$.

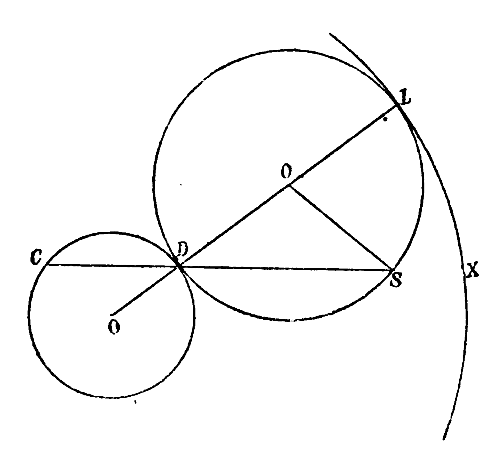
La première partie du théorème se démontre comme le précédent.

Pour démontrer la seconde partie, décrivons une circonférence passant en S et D, et touchant en D la circonférence fixe donnée, on aura

$$\frac{\text{OD}}{\text{DO}'} = \frac{\text{CD}}{\text{DS}} = (k - 1):$$

$$\text{OL} = \text{OD} + 2.\text{DO}' = \text{OD}\,\frac{k+1}{k-1} = \text{R}.$$

De O comme centre, décrivons une circonférence de rayon R, et prenons sur cette circonférence à partir du point A et dans un sens convenable, un arc AX égal à l'arc AS. Le point S appartiendra à l'hypocycloïde engendrée par un point du cercle O'D roulant sur le cercle OL, l'origine du mouvement étant en X, et CDS est la tangente en S à cette courbe, d'après un théorème bien connu.



Théorème VIII. — *Étant donnée une droite de Simson relative à un point variable* M *et à un triangle fixe* ABC, *elle a pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un autre de rayon triple. Le centre du cercle fixe coïncide avec le centre du cercle des neuf points du triangle* ABC, *et son rayon est le triple du rayon de ce cercle.*

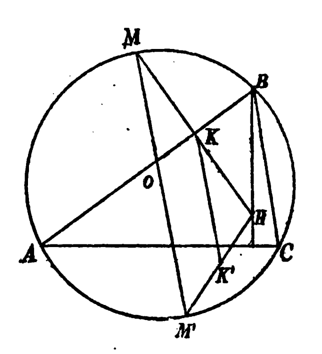
Ce théorème est une conséquence immédiate des deux précédents.

Théorème IX.— *Les droites de Simson relatives à deux points* M *et* M' *diamétralememt opposés sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *se coupent à angle droit.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème V.

Théorème X. — *Deux droites de Simson rectangulaires se coupent sur la circonférence des neuf points du triangle* ABC.

En effet, soient M et M′ les extrémités du diamètre du cercle circonscrit au triangle ; joignons HM, HM′ et soient K et K′ les milieux de ces droites, KK′ est un diamètre du cercle des neuf points ; donc le point de rencontre S des deux droites de Simson rectangulaires qui passent par K et K′ est sur le cercle ayant KK′ pour diamètre, c'est-à-dire sur le cercle des neuf points.



Théorème XI. — *Deux droites de Simson rectangulaires interceptent sur un côté* AC *du triangle deux segments* AP, CQ *égaux entre eux.*

En effet, P et Q sont les projections sur AC des extrémités M et M′ d'un diamètre du cercle circonscrit au triangle BAC.

Théorème XII.— *Deux droites de Simson rectangulaires sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère passant par les trois sommets du triangle* ABC.

Ce théorème résulte du précédent, en vertu d'une propriété connue de l'hyperbole.

Théorème XIII. — *Étant donné un triangle* ABC *inscrit dans une hyperbole équilatère, si aux trois points où les côtés de ce triangle rencontrent une asymptote, on élève des perpendiculaires à ces côtés, elles sont concourantes.*

Ce théorème est un autre énoncé du précédent.

Théorème XIV. — *Si l'on considère une parabole, et une hyperbole équilatère ayant pour l'une de ses asymptotes la tangente au sommet de cette parabole, il existe une infinité de triangles à la fois inscrits dans l'hyperbole et circonscrits à la parabole.*

En effet, il existe un pareil triangle, en vertu des théorèmes qui précèdent, et, par suite, une infinité.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

Nous trouvons dans le Bulletin de M. Darboux une lettre de M. *Sélivanof* à M. Hermite sur la résolution de l'équation du quatrième degré; c'est un emploi très élégant des théorèmes connus sur les formes homogènes du second degré; et nous sommes heureux de le faire connaître à nos jeunes lecteurs; nous reproduisons le sens précis de la lettre de M. Sélivanof, en prenant seulement la liberté de modifier le texte, mais sans *trahir* l'auteur.

Soit $f(x, y) = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Fy^4$, une forme homogène du quatrième degré à deux variables; posons

$$x^2 = \alpha, \ 2xy = \beta, \ y^2 = \gamma,$$

la forme homogène du quatrième degré deviendra une forme homogène du second degré à trois variables:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 6C\alpha\gamma + 2D\beta\gamma + E\gamma^2,$$

et cette forme homogène, qui est incomplète puisqu'elle manque du terme en β^2, peut, en introduisant un paramètre arbitraire λ, s'écrire

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + \lambda\beta^2 + E\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2(3C - 2\lambda)\gamma\alpha + 2B\alpha\beta.$$

Si l'on détermine λ de manière à annuler le discriminant de cette forme homogène du second degré, on aura l'équation du troisième degré :

$$\begin{vmatrix} A & B & 3C - 2\lambda \\ B & \lambda & D \\ 3C - 2\lambda & D & E \end{vmatrix} = 0$$

et chaque racine de cette équation, portée dans la forme homogène $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, la transformera en la somme algébrique de deux carrés :

$$(m\alpha + n\beta + p\gamma)^2 + (m'\alpha + n'\beta + p'\gamma)^2,$$

et par conséquent transformera $f(x, y)$ en

$$(mx^2 + 2nx + p)^2 + (m'x^2 + 2n'x + p')^2,$$

comme le fait la méthode de Ferrari; nous recommandons à nos lecteurs de se familiariser avec ce procédé.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. S. Realis à M. G. de Longchamps. — ..... Permettez-moi, Monsieur, au sujet des notes insérées aux pages 102 et 141 du *Journal de Mathématiques spéciales* (1883), de rappeler un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e Série, t. IV, p. 209) et où j'ai rattaché la résolution de l'équation cubique

$$x^3 - 3px + q = 0$$

à celle des équations de Moivre.

Après avoir établi dans cet article le fait très connu que, dans le cas particulier de

$$q^2 - 4p^3 = 0,$$

deux racines de l'équation sont égales, j'ai signalé la décomposition :

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{\frac{q}{2}} + p = \left(x + 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} = (x + 2\sqrt{p})(x - \sqrt{p})^2.$$

Cette décomposition, très facile à obtenir directement, permet donc, dans la théorie de l'équation du troisième degré, de traiter le cas de deux racines égales, préalablement à la résolution algébrique de l'équation générale.

Il n'y a là, assurément, rien de nouveau, et je ne rappelle ici cette identité que parcequ'elle me semble de nature à simplifier et à compléter la conclusion de la seconde note mentionnée. E. VAZEILLE.

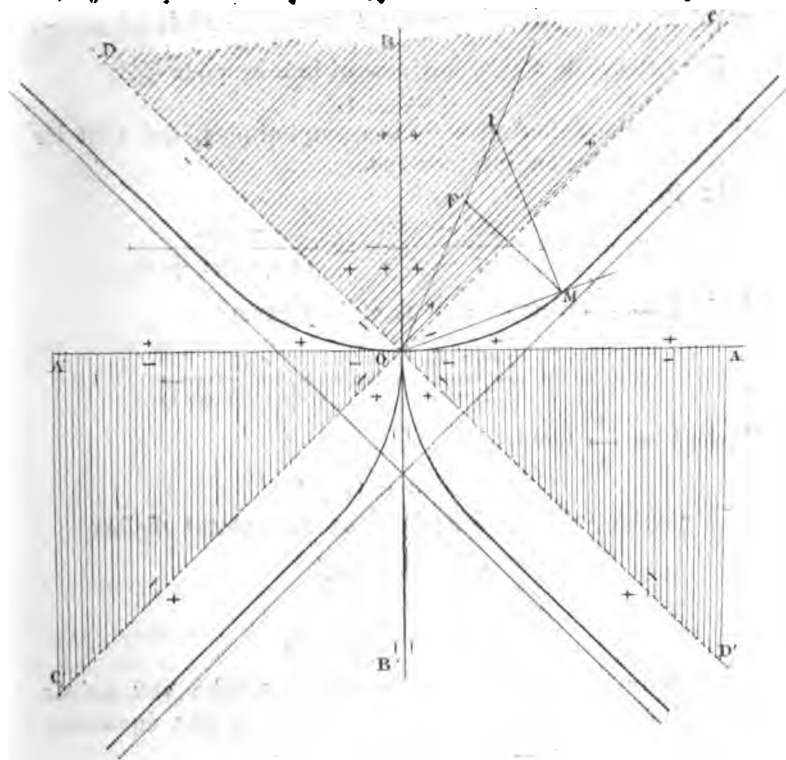
QUESTION 58

Solution par M. Gindre.

On donne la courbe dont l'équation est

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0.$$

1° On propose d'abord de construire cette courbe C; *2° soit* M *un point quelconque de* C, *on joint* OM, *et on trace une droite* Δ, *symétrique de* OM *par rapport à la bissectrice de l'angle des*



axes; cette droite Δ *rencontre la perpendiculaire élevée au point* M *à la droite* OM, *en un point* I *: démontrer que le lieu géométrique de ce point* I *est une hyperbole équilatère; 3° sur* OI

on prend OI′ = MI. *Démontrer que le lieu du point* I′ *est un cercle.*

1° Pour construire la courbe précédente, je pose

$$y = tx,$$

et j'obtiens pour x et y les valeurs

$$x = \frac{2at}{1 - t^4}, \qquad y = \frac{2at^2}{1 - t^4}$$

en fonction d'un seul paramètre variable t.

Je remarque d'abord que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y; il suffira donc, pour obtenir entièrement la courbe, de faire varier t de o à $\frac{\pi}{2}$ et de o à $-\frac{\pi}{2}$.

Les valeurs de x et y deviennent infinies pour

$$t = \pm 1.$$

Il y aura donc deux directions asymptotiques, qui sont les bissectrices des angles des axes.

La différence

$$y - x = \frac{2at^2 - 2at}{1 - t^4} = \frac{-2at}{(1 + t^2)(1 + t)}$$

devient $-\frac{a}{2}$ pour $t = +1$, et la somme

$$y + x = \frac{2at(1 + t)}{1 - t^4} = \frac{2at}{(1 + t^2)(1 - t)}$$

devient $-\frac{a}{2}$ pour

$$t = -1.$$

La courbe présente donc les deux asymptotes réelles

$$y = x - \frac{a}{2},$$

$$y = -x - \frac{a}{2}.$$

Ces deux asymptotes rencontrent la courbe aux points déterminés par les valeurs de t satisfaisant aux équations

$$(1 - t)^2(t^2 + 2t - 1) = 0,$$

et

$$(1 + t)^2(t^2 - 2t - 1) = 0.$$

La courbe présente un point triple à l'origine, les tan-

gentes en ce point sont les axes eux-mêmes, l'axe des y étant une tangente double.

La courbe a la forme ci-contre.

2° Je considère un point quelconque N de C, déterminé par la valeur t: la droite Δ, symétrique de OM, par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, sera déterminée par l'angle IOX, dont la tangente est

$$\operatorname{tg}\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\lambda\right)+\lambda\right]=\frac{\pi}{2}-\lambda=\frac{1}{t}.$$

Les coordonnées du point I seront

$$x = \text{OI} \cdot \cos \overline{\text{IOX}}$$

et

$$y = \text{OI} \cdot \sin \overline{\text{IOX}}.$$

Mais

$$\text{OI} = \frac{\text{OM}}{\cos \frac{\pi}{2} - 2\lambda} = \frac{\text{OM}}{\sin 2\lambda}$$

et

$$\text{OM} = \frac{\sqrt{4a^2t^4 + 4a^2t^2}}{1 - t^4} = \frac{2at}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}};$$

par suite le lieu du point I sera défini par

$$x = \frac{2at \cos \overline{\text{IOX}}}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}\sin 2\lambda} = \frac{at}{1-t^2}$$

$$y = \frac{2at \sin \overline{\text{IOX}}}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}\sin 2\lambda} = \frac{a}{1-t^2}$$

Ces relations définissent une hyperbole équilatère, dont le centre est joint au point $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$ et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle des axes : on construit facilement cette hyperbole, au moyen des deux relations

$$x = ty, \qquad y = \frac{a}{1-t^2}.$$

3° On prend sur la droite Δ, un point I', tel que MI = OI';

or $\text{MI} = \text{OM} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\lambda\right) = \frac{\text{OM}}{\operatorname{tg} 2\lambda} = \frac{\text{OM}(1-t^2)}{2t} = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$

Les coordonnées du point I' seront donc données par

$$x = OI' \cos \overline{IOX} = MI \sin \lambda = \frac{at}{1+t^2}$$

$$y = \overline{OI'} \sin \overline{IOX} = MI \cos \lambda = \frac{a}{1+t^2}$$

Ce lieu défini par les équations

$$x = ty \quad \text{et } y = \frac{a}{2+t^2}$$

est un cercle, ayant pour centre le point $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$, et pour rayon la longueur $\frac{a}{2}$.

NOTA.— La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kéruzoret; Ferval, Azéma, au lycée Henri IV, à Paris; Levaire, pensionnat des Maristes, à Plaisance; Amouroux, à Grenoble; Giat, à Moulins; Pornay, à Toulouse Corot, à Troyes.

BIBLIOGRAPHIE

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS, avec de nombreux exercices, par *P. Mansion*, professeur ordinaire à l'Université de Gand (quatrième édition). Paris, librairie Gauthier-Villars.

Ce petit ouvrage de M. Mansion est trop connu de la plupart de nos lecteurs, il a eu un trop réel et trop légitime succès pour que nous voulions en faire ici une analyse. Tous ceux qui s'intéressent au mouvement moderne des mathématiques savent quelle large part cette théorie des déterminants et ses applications multiples ont prise dans nos cours de mathématiques spéciales. C'est cette algèbre nouvelle qui a si profondément attaqué l'enseignement ancien, et lui a substitué, avec un autre ordre d'idées, des méthodes et des démonstrations nouvelles. On peut dire, croyons-nous, sans exagération, que les propriétés des déterminants, et la pratique du calcul algébrique qui leur correspond, sont la base la plus ordinaire de cet enseignement nouveau auquel nous venons de faire allusion.

Nous ne rappelons ce fait très connu que pour en déduire l'observation (à l'adresse de nos jeunes lecteurs, candidats à l'École Polytechnique ou à l'École Normale) qu'il devient de plus en plus nécessaire de se familiariser avec l'algèbre des déterminants. C'est cette pensée qui nous pousse à leur signaler, comme une chose des plus utiles pour eux, la lecture du livre de M. Mansion. Ces éléments renferment un très grand nombre d'exercices, parmi lesquels beaucoup sont résolus. La quatrième

édition renferme aussi un chapitre préliminaire traitant des déterminants à deux ou trois lignes. Les démonstrations sont présentées sous un jour tout à fait simple et élémentaire; les commençants, ceux pour qui la notation des indices offre quelque difficulté, pourront, en lisant l'ouvrage que nous leur recommandons ici, franchir plus facilement les premières difficultés que présente la théorie des déterminants.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

88. — On considère une ellipse E, et le cercle Δ décrit sur le petit axe BB' comme diamètre. Sur BB', à partir du centre O, on prend deux points P, P' tels que l'on ait

$$OP = OP' = \frac{bc}{a};$$

par ces points P et P', on mène deux droites parallèles et dans la même direction; ces droites rencontrent Δ en des points Q et Q'. Trouver le lieu décrit par le point de rencontre des tangentes à Δ aux points Q et Q'. *(G. L.)*

89. — On considère un cercle Δ, et l'on prend sur la circonférence un point mobile M. Ayant joint ce point aux extrémités d'un diamètre fixe AB, du point M on abaisse sur AB une perpendiculaire MP; le cercle décrit de M comme centre avec MP pour rayon rencontre MA en A' et MB en B'. Le lieu décrit par le point de rencontre de MP et de A'B' est une courbe du dixième degré, ayant pour points quadruples les points A et B. On montrera que si AB est l'axe des x, l'équation peut se résoudre par rapport à y, et l'on donnera la forme générale de cette courbe, qui est une unicursale. *(G. L.)*

90. — Construire le lieu des pieds des normales menées d'un point fixe S, à la suite des circonférences qui touchent deux droites fixes données. — Examiner : 1° le cas particulier où le point fixe S est sur l'une des deux droites données; 2° le cas où le point S est également distant des deux droites données; 3° le cas où le point S se transporte à l'infini dans une direction donnée. *(E. V.)*

91.— On donne un point fixe O et une droite fixe AB; pour chaque point P de AB on prend, normalement à AB, PM $= \lambda \,.\, OP$, λ étant une constante. Quel est le lieu du point M, et quel est le problème simple de géométrie descriptive que l'on peut regarder comme l'origine du problème actuel?

(E. V.)

92. — On donne une circonférence fixe O, et une droite fixe, AB. Sur chaque tangente à la circonférence on prend le point M, de telle sorte que le point de contact P soit le milieu du segment QM limité d'un côté au point M, et de l'autre côté sur la droite fixe AB. Quel est le lieu du point M? – On examinera en particulier le cas où la droite AB est tangente à la circonférence, et le cas particulier où la droite AB est un diamètre de la circonférence. *(E. V.)*

93. — On donne deux coniques fixes U et V, et un point fixe S; par le point S, on mène une transversale arbitraire qui détermine sur U un segment (m', m'') et sur V un segment (n'', n''), et l'on demande : 1° le lieu du centre de l'involution déterminée par ces deux segments; 2° le lieu des points doubles de cette involution. — Expliquer comment ce dernier lieu peut devenir le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à une série de coniques homofocales. *(E. V.)*

AVIS

L'abondance des matières nous oblige à remettre au prochain numéro la suite de l'étude sur les nouvelles fractions continues.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 378-4.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir année 1883, p. 193, 217, 241, 269.)

XIV. Application à un exemple numérique. — Avant d'aller plus loin dans cette théorie, il sera peut-être utile de montrer sur un exemple numérique comment on peut, *par de simples additions*, extraire une racine carrée en appliquant la méthode que nous exposons.

Prenons une équation du second degré, à coefficients commensurables, par exemple l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation a une racine supérieure à l'unité et nous pourrons trouver, par notre méthode, des valeurs de plus en plus approchées de la plus petite racine $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Comme nous l'avons démontré, les calculs que nous allons indiquer donnent des nombres ayant cette irrationnelle pour limite.

A cet effet, considérons l'équation de récurrence,

$$u_n - 3u_{n-1} + u_{n-2} = 0$$

et prenons quatre nombres *arbitrairement*, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$; $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$. Ces nombres doivent, naturellement, être pris avec une valeur très simple, et sous cette réserve que l'on n'ait pas $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = 0$.

Pour le dire en passant, cette latitude absolue laissée aux constantes initiales permet, par un choix convenablement fait, de se rapprocher plus rapidement de la valeur de l'irrationnelle ; mais cette considération n'est pas entrée dans la détermination du choix précédent, qui n'a été inspiré que par la pensée de prendre des valeurs initiales simples et, aussi, par une autre idée que nous indiquerons tout à l'heure.

Les nombres récurrents α_n, β_n se calculent alors par les formules

$$\alpha_n = 3\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2},$$
$$\beta_n = 3\beta_{n-1} - \beta_{n-2};$$

et l'on peut écrire,

$$\frac{X}{Y} = \frac{1 + 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 233 + 610 + 1597 + 4181 + 10946 + \ldots}{1 + 2 + 5 + 13 + 34 + \ldots\ldots}.$$

On voit d'abord, d'après ce résultat, quelle est l'idée à laquelle nous venons de faire allusion. La loi de récurrence des fonctions β étant la même que celle des fonctions α, si l'on fait en sorte de choisir

$$1^o\ \beta_0 = \alpha_1, \quad 2^o\ \beta_1 = \alpha_2 = 3\alpha_1 - \alpha_0,$$

les nombres β_2, β_3, ... seront respectivement égaux aux nombres α_3, α_4, ... ; et les calculs se trouvent ainsi abrégés de moitié.

Calculons maintenant les réduites successives. comme le montre le tableau ci-dessous :

$\frac{X_0}{Y_0}$	$\frac{X_1}{Y_1}$	$\frac{X_1}{Y}$	$\frac{X_3}{Y_3}$	$\frac{X_4}{Y_4}$	$\frac{X_5}{Y_5}$	$\frac{X_6}{Y_6}$	$\frac{X_7}{Y_7}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{22}{55}$	$\frac{56}{144}$	$\frac{145}{377}$	$\frac{378}{987}$
1	0,6..	0,5	0,4..	0,38..	0,38..	0,38..	0,38..

$\frac{X_8}{Y_8}$	$\frac{X_9}{Y_9}$	$\frac{X_{10}}{Y_{10}}$	$\frac{X_{11}}{Y_{11}}$
$\frac{988}{2584}$	$\frac{2585}{6765}$	$\frac{6766}{17711}$	$\frac{17712}{46368}$
0,38..	0,38..	0,38..	0,381..

Si l'on rapproche ces nombres du résultat connu :

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,3819682\ldots$$

on voit que c'est seulement la réduite d'indice 11 qui a donné le chiffre exact des millièmes; mais il faut considérer que les termes qui composent cette réduite ont été obtenus par un procédé des plus simples et qui consiste : 1° à tripler le nombre précédemment obtenu; 2° à retrancher de ce résultat le nombre anté-précédent; 3° à ajouter tous les nombres ainsi calculés.

Mais on peut encore abréger ces calculs et obtenir, par voie récurrente, les nombres X_n, Y_n, comme nous allons l'indiquer maintenant.

XV. Récurrence des fonctions X_n et Y_n. — L'équation proposée étant

$$x^2 - 2px + q = 0, \qquad (A)$$

on a, pour calcul des fonctions α, les égalités suivantes

$$(1) \left\{ \begin{array}{r} \alpha_n - 2p\alpha_{n-1} + q\alpha_{n-2} = 0, \\ \alpha_{n-1} - 2p\alpha_{n-2} + q\alpha_{n-3} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_2 - 2p\alpha_1 + q\alpha_0 = 0. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, on a aussi,

$$X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Les égalités (1) donnent donc

$$X_n - \alpha_0 - \alpha_1 - 2p(X_{n-1} - \alpha_0) + qX_{n-2} = 0. \qquad (B)$$

Changeons n en $n - 1$, nous avons

$$X_{n-1} - \alpha_0 - \alpha_1 - 2p(X_{n-2} - \alpha_0) + qX_{n-3} = 0$$

et, par suite,

$$X_n - (2p + 1)X_{n-1} + (2p + q)X_{n-2} - qX_{n-3} = 0. \qquad (C)$$

C'est une relation de récurrence à laquelle on peut appliquer le théorème de Lagrange, et, en observant que l'équation génératrice est, dans cet exemple,

$$z^3 - (2p + 1)z^2 + (2p + q)z - q = 0,$$

ou

$$(z - 1)(z^2 - 2pz + q) = 0,$$

on voit donc que, en appelant x', x'' les racines de (A), on a

$$X_n = A + Bx'^n + Cx''^n. \qquad (D)$$

Cette formule s'applique, bien entendu, aux fonctions Y_n, en choisissant convenablement les constantes A, B, C.

XVI. Calcul des constantes A, B, C. — En faisant, successivement, dans la formule (B), $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on a

$$X_0 = \alpha_0 = A + B + C,$$
$$X_1 = \alpha_0 + \alpha_1 = A + Bx' + Cx'',$$
$$X_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = A + Bx'^2 + Cx''^2.$$

Nous allons résoudre ces trois équations, en tenant compte des relations

$$\alpha_2 - 2p\alpha_1 + q\alpha_0 = 0,$$
$$x' + x'' = 2p,$$
$$x'x'' = q.$$

Le déterminant Δ de ces inconnues est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x' & x'' \\ 1 & x'^2 & x''^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x' - 1 & x'' - 1 \\ 1 & x'^2 - 1 & x''^2 - 1 \end{vmatrix}$$

ou, enfin,

$$\Delta = (x' - x'')(q - 2p + 1) = (x'' - x')(x' - 1)(x'' - 1).$$

Les racines de l'équation (A) ne sont pas commensurables et, dans cette hypothèse, Δ n'est pas nul. Un calcul évident donne pour A, B, C les valeurs suivantes :

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_0\,(1 - 2p)}{(x' - 1)(x'' - 1)},$$
$$B = \frac{x'(\alpha_1 - \alpha_0 x'')}{(x' - x'')(x' - 1)},$$
$$C = \frac{x''(\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x'' - x')(x'' - 1)}.$$

La constante A peut être nulle, si la constante α_1 vérifie l'égalité

$$\alpha_1 = \alpha_0\,(2p - 1),$$

mais les constantes B et C sont nécessairement différentes de zéro, x' et x'' n'étant pas des nombres commensurables.

XVII. Récurrence des fonctions Z_n. — Pour étudier les fonctions $\frac{X_n}{Y_n}$ et, notamment, pour savoir si elles vont, ou non, en croissant, il est naturel de former la différence :

$$\frac{X_n}{Y_n} - \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}},$$

et l'on est ainsi conduit à poser

$$Z_n = X_n Y_{n-1} - Y_n X_{n-1}.$$

Nous nous proposons de rechercher la récurrence de ces fonctions Z_n.

L'égalité (B) donne, après avoir posé $K = \alpha_1 + \alpha_0(1 - 2p)$,

$$X_n = 2pX_{n-1} - qX_{n-2} + K.$$

On a, de même,

$$Y_n = 2pY_{n-1} - qY_{n-2} + K'. \quad [K' = \beta_1 + \beta_0(1 - 2p)].$$

On en déduit, par combinaison,

$$X_nY_{n-1} - Y_nX_{n-1} = q(X_{n-1}Y_{n-2} - Y_{n-1}X_{n-2}) + KY_{n-1} - K'X_{n-1}$$

ou

$$Z_n = qZ_{n-1} + KY_{n-1} - K'X_{n-1}$$

et, par suite,

$$Z_{n-1} = qZ_{n-2} + KY_{n-2} - K'X_{n-2},$$
$$Z_{n-2} = qZ_{n-3} + KY_{n-3} - K'X_{n-3}.$$

Multiplions ces trois dernières égalités respectivement par : 1, $-2p$, et q; le facteur de K se trouve égal à K'; celui de K', égal à K ; et nous avons, finalement,

$$Z_n - (2p + q)Z_{n-1} + q(1 + 2p)Z_{n-2} - q^2Z_{n-3} = 0.$$

C'est la loi de récurrence des fonctions Z_n.

XVIII. Recherche de l'intégrale Z_n. — Pour trouver la fonction Z_n, nous devrons considérer l'équation

$$x^3 - (2p + q)x^2 + q(1 + 2p)x - q^2 = 0,$$

ou la suivante :

$$(x - q)(x^2 + 2px + q) = 0.$$

Ainsi les trois racines de l'équation génératrice sont : x', x'' et $x'x''$. L'intégrale Z_n est donc, conformément au théorème de Lagrange, donnée par la formule

$$Z_n = A'x'^n x''^n + B'x'^n + C'x''^n.$$

En posant

$$\delta = \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1,$$

on trouve, d'abord,

$$Z_1 = -\delta,$$
$$Z_2 = -(2p + q)\delta,$$
$$Z_3 = (q - q^2 - 2pq - 4p^2)\delta\ ;$$

puis

$$-A' = \frac{\delta}{(x' - 1)(x'' - 1)},$$

$$-B' = \frac{\delta}{(x'' - 1)(x'' - x')},$$

$$-C' = \frac{\delta}{(x' - 1)(x' - x'')}.$$

Ces quantités ont une somme nulle, mais chacune d'elles représente un nombre fini et différent de zéro.

(A suivre.)

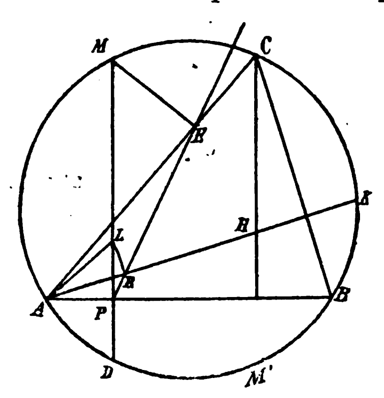
NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

(Suite, voir page 11.)

Théorème XV. — *Une droite de Simson relative à un point* M *et à un triangle* ABC *est droite de Simson relative au triangle* ABH *et au point de rencontre des hauteurs du triangle* MAB.

Abaissons du point M une perpendiculaire MP sur AB, laquelle rencontre en D le cercle circonscrit. Soit PE la droite de Simson correspondant à M et au triangle ABC. Soit AK la hauteur du triangle ABC, elle rencontre en R la droite PE; élevons en R une perpendiculaire sur AK, cette perpendiculaire rencontre MP en L. Notre théorème sera démontré si nous prouvons que l'on a



$$PL = PD, \text{ ou } ALP = ADP.$$

Or, on a

$$ALP = ARP = RPB - RAP,$$

$$RPB = \frac{\pi}{2} - RPL = \frac{\pi}{2} - MAE.$$

Donc RPB a pour mesure la moitié de l'arc CM', M étant diamétralement opposé à M; RAP a pour mesure la moitié de l'arc KB. Donc ALP a pour mesure

$$\frac{1}{2} \text{ arc}.\text{CM}' - \frac{1}{2} \text{ arc KB} = \frac{1}{2} (\text{CK} + \text{BM}')$$
$$= \frac{1}{2} (\pi - \text{AM}')$$
$$= \frac{1}{2} (\text{AM}).$$

Donc on a bien $\text{ALP} = \text{ADP}$.

Théorème XVI. — *Une droite de Simson relative à un point* M *et au triangle* ABC *est droite de Simson relative aux trois triangles formés avec deux sommets du premier et le point de concours de ses hauteurs.*

Ce théorème n'est que la traduction du précédent.

Théorème XVII. — *L'hyperbole équilatère qui passe par les trois sommets d'un triangle passe par le point de concours des hauteurs de ce triangle; son centre est sur le cercle des neuf points du triangle; ses asymptotes sont tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème résulte des précédents.

Théorème XVIII. — *Par un point passent trois droites de Simson; il existe un triangle ayant pour hauteurs ces trois droites et pour côtés trois autres droites de Simson.*

Rappelons que si l'on considère une droite de Simson rencontrant le cercle des neuf points en P et P_1, et si l'on prend sur ce cercle deux arcs PQ et P_1Q_1, dont l'un est double de l'autre, la droite QQ_1 est une droite de Simson.

Soit E le point de rencontre des deux droites de Simson PP_1 et QQ_1. Les perpendiculaires P_1G, Q_1K à ces droites seront des droites de Simson, puisqu'elles coupent les premières à angle droit sur le cercle des neuf points. On a

$$\text{arc } P_1Q_1 = 2 \;.\; \text{arc PQ},$$

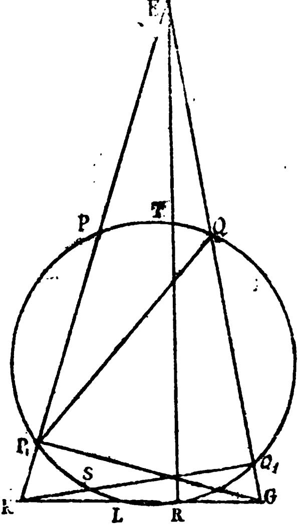
donc EQP_1 est isoscèle, donc $QE = QP_1$.

Par suite, $QE = QG$. De même $EP = PK$.

Ceci prouve que le triangle EKG a pour son cercle des neuf points le cercle considéré.

Donc, si L et R sont les points où KG rencontre ce cercle,

L est le milieu de KG, et R est le pied de la troisième hauteur du triangle EKG. On a donc



$$LK = LG = LQ_1.$$

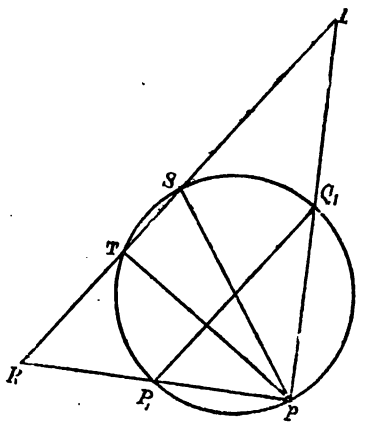
Le triangle Q_1LK étant isoscèle, les angles LKQ_1 et LQ_1K sont égaux; donc l'arc RQ_1 est double de l'arc LS. Comme Q_1S est droite de Simson, on voit que KG est aussi droite de Simson. Actuellement, si l'on considère les trois droites de Simson, KL, KS, KP, les trois droites de Simson qui leur sont perpendiculaires sont: ER, troisième hauteur du triangle EKG, EQ, P_1G; elles forment un triangle dont les trois premières sont les hauteurs. Il reste à démontrer que ER est droite de Simson; or elle rencontre le cercle en un point T, et l'on a

$$TEQ = SKL;$$

donc

$$\text{arc}TQ = \text{arc}LS = \frac{1}{2} \text{ arc } RQ_1,$$

donc la proposition est démontrée.



Théorème XIX. — *La distance des points de contact de deux droites de Simson rectangulaires avec leur enveloppe est constante, et la droite qui joint les deux points est une droite de Simson.*

Soient PQ_1, et PP_1 deux droites de Simson rectangulaires passant par un point P du cercle des neuf points. Si l'on prolonge PQ_1 et PP_1 de longueurs $Q_1L = PQ_1$ et $P_1R = PP_1$, les points L et R sont

ceux ou ces deux droites touchent leur enveloppe. LR rencontre le cercle au point S diamétralement opposé à P et au point T symétrique de P par rapport à P_1Q_1. Donc on a

$$\text{arc PT} = 2 \,.\, \text{arc } Q_1S.$$

Donc LR est une droite de Simson ; sa longueur est constante et égale à quatre fois le rayon du cercle des neuf points. Il est à remarquer que PT est une droite de Simson.

Théorème XX. — *Toute tangente à l'hypocycloïde à trois rebroussements en un point* P *rencontre la courbe en deux points* M,N, *tels que les tangentes à la courbe en ces points sont rectangulaires; le segment* MN *est de longueur constante; il existe une tangente à l'hypocycloïde, perpendiculaire à la première, et passant par le point de rencontre des tangentes en* M *et* N.

Ce théorème n'est qu'un énoncé du précédent.

Théorème XXI.— *L'hypocycloïde à trois rebroussements, enveloppe des droites de Simson, est une courbe de la troisième classe et du quatrième degré.*

Ce théorème résulte des théorèmes XVIII et XIX, convenablement interprétés.

Théorème XXII. — *Étant donnés un point* M *et un triangle* ABC, *si du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur la droite de Simson qui lui correspond, cette perpendiculaire est une droite de Simson relative au triangle obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles aux côtés opposés.*

Abaissons du point M les perpendiculaires ME, MD sur AB et BC. La droite ED sera la droite de Simson relative au point M et au triangle ABC. Menons par le point C une parallèle à AB, laquelle rencontre en G la droite ME, en C_1 le cercle circonscrit à ABC, et en R la perpendiculaire abaissée de M sur DE. Cette dernière perpendiculaire rencontre DE en K, et AB en L. On a

$$EMK = KEL = BMD = GMC_1.$$

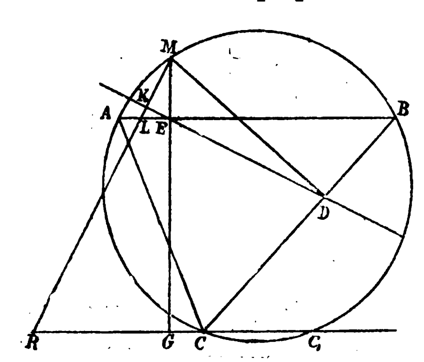
Donc

$$GR = GC_1.$$

Il est facile de démontrer que le triangle ABC, et le triangle A'B'C' obtenu en menant par les sommets du premier des

parallèles aux côtés opposés, sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre de gravité de A'B'C'. On en conclut que le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C' est au point de rencontre des perpendiculaires élevées en C_1, A_1, B_1, sur les côtés A'B', B'C', A'C'. Soit H_1 ce point.

Élevons en R une perpendiculaire sur GR, elle rencontrera H_1M en un point M_1. On aura $H_1M = MM_1$ à cause de $GC_1 = GR$. Dès lors ce point M_1 appartiendra aux trois perpendiculaires élevées aux côtés de A'B'C' par le point R et les deux points analogues à R. Donc enfin MR est droite de Simson relative à M_1 et aux côtés du triangle A'B'C'. On voit de plus que lorsque M varie, la droite MM_1 passe par le point fixe H_1.



Théorème XXIII. — *Étant donnés une parabole et un triangle circonscrit, si l'on considère le triangle obtenu en menant par les sommets du premier des parallèles aux côtés opposés, il existe une parabole inscrite à ce triangle et ayant pour tangente au sommet l'axe de la première. La droite qui joint les foyers des deux paraboles passe par le point de concours* H_1 *des hauteurs du grand triangle; on a* $H_1F = FF_1$, *en désignant par* F *et* F_1 *le foyer de la première parabole et celui de la seconde.*

Ce théorème est une traduction du précédent.

Théorème XXIV. — *On considère un triangle fixe* ABC *et une suite de paraboles inscrites à ce triangle; par le foyer* F *de chacune d'elles on mène une droite faisant avec l'axe de la parabole un angle donné* α; *l'enveloppe de ces droites est une hypocycloïde à trois rebroussements. Quand* α *varie, toutes les hypocycloïdes correspondantes sont égales entre elles et ne font que tourner autour du centre du cercle circonscrit au triangle.*

Soient F et F_1 deux positions du foyer, et FK, F_1K_1 les deux droites correspondantes, qui rencontrent le cercle circonscrit au triangle en F et K, et en F_1 et K_1. L'angle des droites FK et F_1K_1 est égal à celui des droites de Simson correspondant au triangle ABC et aux deux points F, F_1. Donc cet angle est la moitié de l'angle au centre FOF_1. Il a pour mesure

$$\frac{1}{2} \text{ arc } KK_1 - \frac{1}{2} \text{ arc } FF_1 ;$$

donc on a

$$\text{arc } KK_1 = 2 \,.\, \text{arc } FF_1.$$

Par suite, en laissant fixe la droite FK, on voit que la droite variable F_1K_1 enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le centre du cercle fixe de cette courbe est en O, et son rayon est triple de celui du cercle circonscrit au triangle ABC. Ceci démontre le théorème énoncé.

Donnons à α une valeur, et considérons les droites FX, F_1X_1 . . . correspondantes. Elles seront tangentes à une même hypocycloïde. D'un point quelconque P menons à cette courbe les trois tangentes ; les tangentes perpendiculaires à celles-là formeront un triangle RST dont les premières sont les hauteurs. Ceci posé, FX, F_1X_1, etc., seront les axes d'une parabole variable inscrite au triangle RST ; cela résulte des théorèmes précédents ; on voit que le triangle RST peut être choisi d'une double infinité de manières ; il a un cercle des neuf points toujours le même. *(A suivre.)*

QUESTION 59

Solution par M. Jérôme CALLÉ, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Lieu des centres des coniques de surface donnée circonscrites à un triangle. — Examiner spécialement le cas des hyperboles. Étudier dans ce cas les branches infinies et les sinuosités de la courbe. (Amigues.)

Prenons pour axes deux côtés OA et OB du triangle, et

posons

$$OA = 2a,\ OB = 2b.$$

Soit θ l'angle des axes.

L'équation générale des coniques circonscrites sera

$$Ax(x - 2a) + 2Bxy + Cy(y - 2b) = 0. \qquad (1)$$

Soit (x, y) le centre d'une de ces coniques. La surface de la conique devant être constante, par suite le rectangle des carrés des axes constant et égal à m^4, on aura entre x et y la relation

$$(Aax + Cby)^2 \sin^2 \theta + m^4(B^2 - AC) = 0. \qquad (2)$$

D'ailleurs, x et y satisfont aux deux relations

$$\begin{cases} A(x - a) + By = 0 \\ Bx + C(y - b) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Éliminant A, B, C entre (2) et (3), on aura l'équation du lieu. Or de (3) on tire

$$A = -\frac{By}{x - a}; \quad C = -\frac{Bx}{y - b}.$$

Portant dans (2), il vient, après suppression du facteur B^2, évanouissement des dénominateurs et réduction dans le dernier terme,

$$\begin{aligned} &x^2y^2(bx + ay - 2ab)^2 \sin^2 \theta \\ &- m^4(x - a)(y - b)(bx + ay - ab) = 0. \end{aligned} \qquad (I)$$

Le lieu cherché est donc du sixième degré.

Nous avons supposé que le produit des carrés des axes était positif; nous nous sommes donc placé dans le cas des ellipses. Pour nous mettre dans le cas des hyperboles, il suffira de changer le signe de m^4.

I. Cas des ellipses. Points doubles, tangentes. — On voit aisément sur l'équation qu'il y a *trois points doubles*, dont les coordonnées sont

$$(a.0), \quad (0.b) \quad \text{et} \quad (a.b).$$

Ce sont les milieux des trois côtés du triangle.

Portant l'origine au premier, A′ (milieu de OA), l'équation devient

$$\begin{aligned} &(x + a)^2y^2(bx + ay - ab)^2 \sin^2 \theta \\ &- m^4x(y - b)(bx + ay) = 0. \end{aligned} \qquad (I')$$

Les tangentes en ce point sont données par l'équation

$$a^4b \sin^2\theta \,.\, y^2 + m^4axy + m^4bx^2 = 0.$$

La condition de réalité est

$$m^4a^2(m^4 - 4a^2b^2 \sin^2\theta) > 0,$$

ou

$$m^2 \geq 2ab \sin\theta,$$

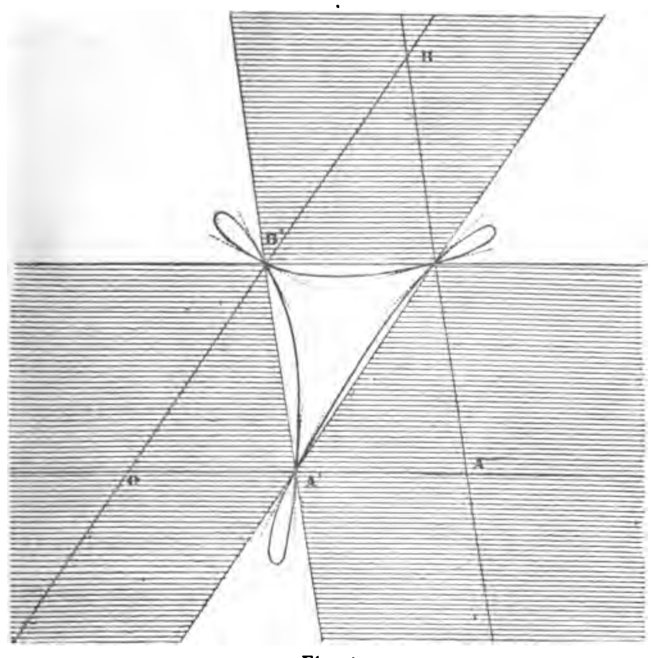


Fig. 1.

c'est-à-dire que le rectangle des axes de la conique doit être supérieur ou égal à la surface du triangle donné. Si cette condition est remplie, les deux tangentes sont situées dans le deuxième angle des axes. — La condition est évidemment la même pour les autres points doubles, car rien ne distingue l'un des côtés du triangle des deux autres. On peut d'ailleurs le voir très aisément par deux nouveaux transports de coordonnées. Donc:

Si $m^2 > 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points doubles réels, avec tangentes distinctes *(fig. 1)*.

Si $m^2 = 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points de rebroussement *(fig. 2)*.

Si $m^2 < 2ab \sin \theta$, la courbe a trois points doubles imaginaires *(fig. 3)*.

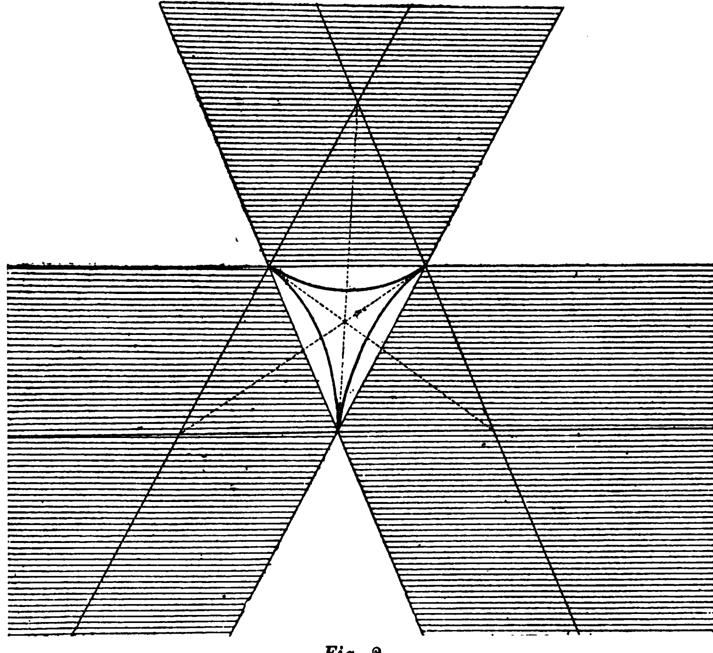


Fig. 2.

— Dans le cas où les deux tangentes se confondent, leur coefficient angulaire commun est

$$t = - \frac{m^4}{2a^2b \sin^2 \theta}$$

et en tenant compte de la relation

$$m^2 = 2ab \sin \theta, \qquad t = - \frac{b}{2a}.$$

La tangente est donc la médiane correspondant au côté OA. De même aux deux autres points.

Voyons si ces points doubles ne peuvent pas être *points doubles d'inflexion.*

Dans (I′), posons $y = tx$; cette équation devient après suppression de la racine $x^2 = 0$

$$t^2(x + a)^2[(b + at)x - ab]^2 \sin^2\theta - m^4(tx - b)(b + at) = 0.$$

La droite $y = tx$ sera tangente d'inflexion, si nous pouvons trouver une valeur de t annulant à la fois les coefficients des deux termes de degré moindre, c'est-à-dire satisfaisant aux équations :

$$a^4b \sin^2\theta t^2 + m^4at + m^4b = 0$$
$$2a^4b \sin^2\theta t^2 + m^4at + m^4b = 0,$$

ce qui exige évidemment $a = 0$, ou $b = 0$.

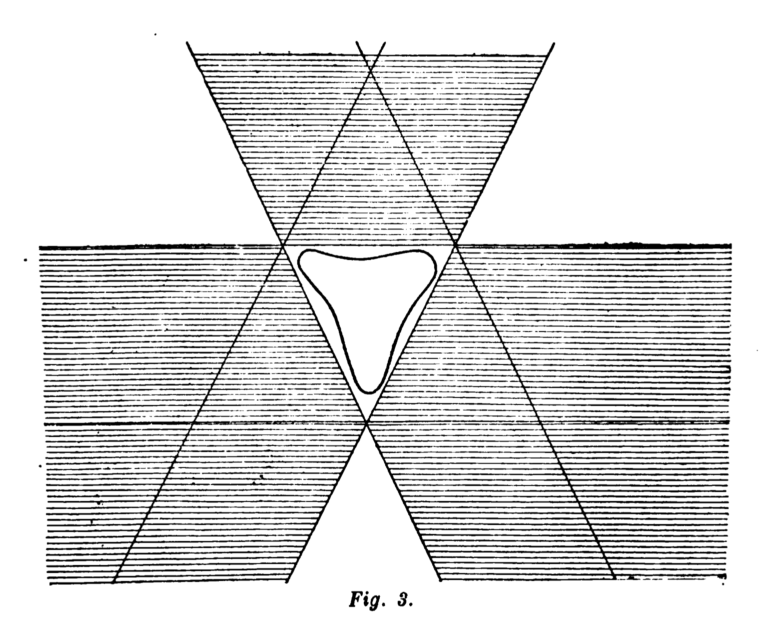


Fig. 3.

Régions. — On voit immédiatement en construisant les droites $x - a = 0$, $y - b = 0$, $bx + ay - ab = 0$, qu'il ne peut y avoir de points de la courbe dans les régions ombrées.

Asymptotes. — Il y a trois directions asymptotiques,

qui sont les trois côtés du triangle. Les deux axes sont les asymptotes de leurs directions. — Le troisième côté du triangle, ne jouissant d'aucune propriété distincte, sera aussi l'asymptote de la sienne. On le vérifie aisément, d'ailleurs, en cherchant l'ordonnée à l'origine, qui est racine de l'équation

$$\frac{u^2}{1 \cdot 2} \varphi''_m(1 \cdot c) + u\varphi'_{m-1}(1 \cdot c) + \varphi_{m-2}(1 \cdot c) = 0,$$

qui se réduit à $(u - 2b)^2 = 0$.

Dans le cas présent, les asymptotes sont dans les régions ombrées, donc les branches de courbe correspondantes sont imaginaires.

Remarque. — Il est clair que le lieu des centres sera imaginaire si on donne à m^2 une valeur inférieure au rectangle des axes de l'ellipse minimum circonscrite au triangle, lequel est, comme on sait,

$$\frac{8ab \sin \theta}{3\sqrt{3}}.$$

II. Cas des hyperboles. — L'équation s'obtient en changeant le signe de m^4 dans (1), ce qui donne

$$x^2y^2(bx + ay - 2ab)^2 \sin^2 \theta$$
$$+ m^4(x - a)(y - b)(bx + ay - ab) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Voyons quels sont les changements :

Les asymptotes sont les mêmes, car elles ne dépendent pas de m^4.

Les points doubles sont aussi les mêmes, et la condition de réalité des tangentes en ces points est, en changeant le signe de m^4,

$$m^4a^2(m^4 + 4a^2b^2 \sin^2 \theta) > 0.$$

Elle est donc toujours remplie.

Les points doubles ne peuvent devenir points de rebroussement dans ce cas, sauf le cas particulier de $a = 0$, où leur coefficient angulaire commun serait infini : car les coefficients de y^2 et de xy s'annulent dans leur équation.

C'est encore dans les seuls cas particuliers de $a = 0$, $b = 0$, que les points doubles pourront devenir points doubles d'inflexion.

Les régions ombrées sont simplement transposées.

La courbe générale a la forme représentée par la figure 4.

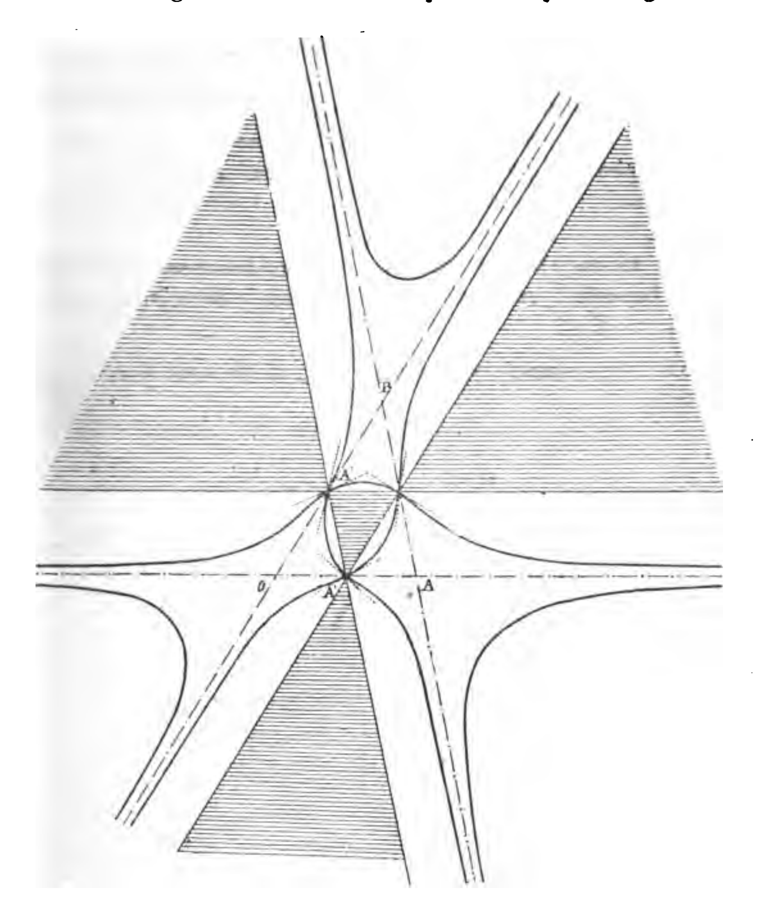


Fig. 4.

Cas particuliers. — 1° $a = 0$. — Ce cas peut convenir à des ellipses et à des hyperboles. L'énoncé se transforme en remplaçant « *coniques circonscrites au triangle* OAB », par « *coniques tangentes en* O *à une droite donnée* OX *et passant par un point fixe* C ».

Cas des ellipses. — L'équation devient

$$b^4x^4y^2 \sin^2 \theta - m^4x^2(y - b) = 0.$$

$x^2 = 0$, axe des y. — L'origine est la limite du point double A′ et l'axe des y est à lui-même sa tangente double d'inflexion en ce point.

Il reste la courbe du quatrième degré

$$bx^2y^2 \sin^2 \theta - m^4(y - b = 0. \qquad \text{(III)}$$

Il ne peut y avoir de points du lieu au-dessous de la droite $y = b$, qui est tangente en son point d'intersection avec OY.

Les deux axes sont asymptotes. A l'axe des x correspondent quatre branches imaginaires, à celui des y deux imaginaires et deux réelles.

Points de tangence verticale. — Ils sont donnés par l'équation

$$2bx^2y \sin^2 \theta - m^4 = 0,$$

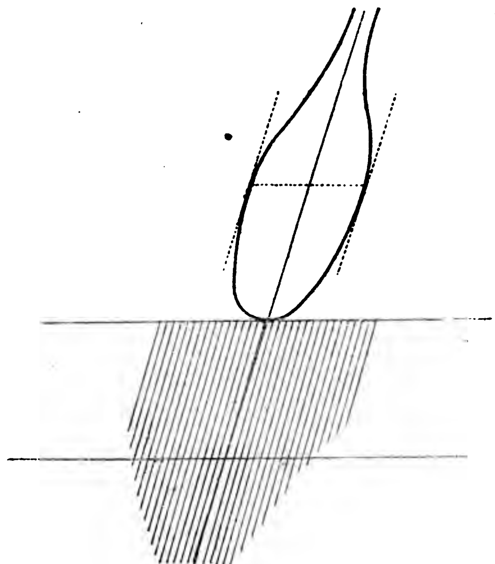


Fig 5.

qui, combinée avec (3), donne

$$y = 2b.$$

Par suite

$$x = \pm \frac{m^2}{2b \sin \theta}.$$

La courbe a la forme indiquée (*fig.* 5).

Cas des hyperboles.

$$x^2 = 0,$$

et

$$bx^2y^2 \sin^2 \theta + m^4(y - b) = 0.$$

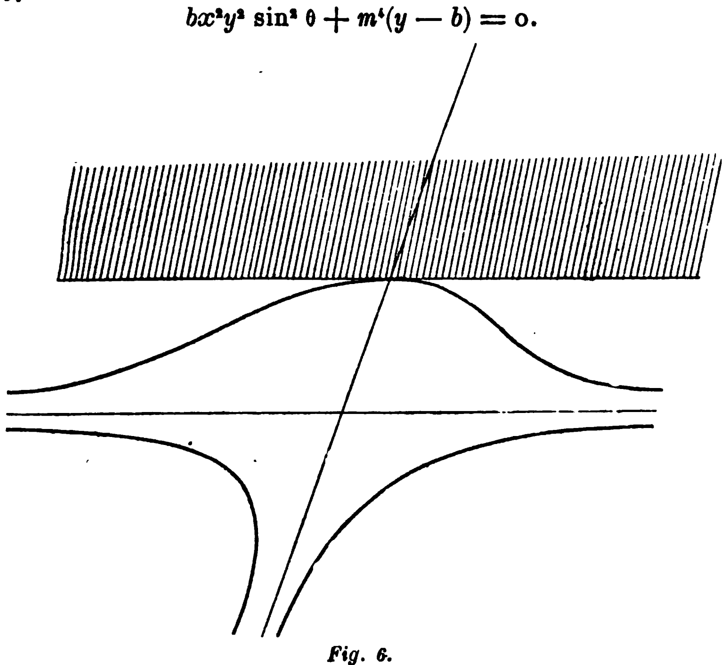


Fig. 6.

Pas de points de cette courbe au-dessus de $y = b$. Cette droite lui est tangente sur OY. — L'axe des x est asymptote double correspondant à quatre branches réelles; l'axe des y est asymptote double correspondant à deux branches réelles et deux imaginaires.

Les points de tangence verticale ont encore leur ordonnée réelle : $y = 2b$, mais leur abscisse imaginaire, car

$$x_2 = - \frac{m^4}{4b^2 \sin^2 \theta}.$$

La courbe a la forme représentée (*fig.* 6).

Pour $b = 0$, on aurait les deux mêmes courbes disposées de même, par rapport au côté OA; et aussi pour $c = 0$.

2° $a = \infty$. L'énoncé se transforme en changeant : *coniques circonscrites à un triangle* OAB, *en coniques passant en deux points donnés* O *et* B, *et ayant une direction asymptotique donnée* OA. L'énoncé ne convient plus alors qu'à des hyperboles.

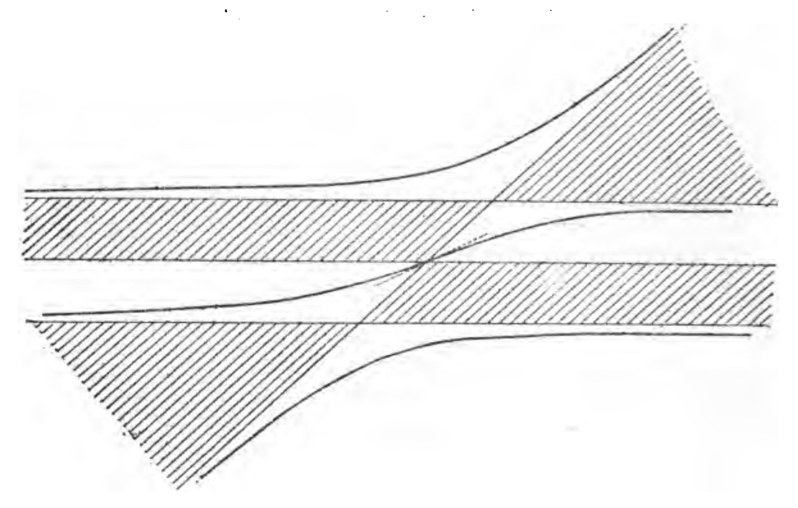


Fig. 7.

L'équation devient

$$x^2y^2(y - 2b)^2 \sin^2 \theta - m^4(y - b)^2 = 0,$$

qui se décompose en deux cubiques :

$$xy(y - 2b) \sin \theta - m^2(y - b) = 0, \qquad (fig.\ 7)$$
$$xy(y - 2b) \sin \theta + m^2(y - b) = 0. \qquad (fig.\ 8)$$

Les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = b$, $y = 2b$, séparent le plan en régions inversement disposées pour les deux courbes.

Les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = 2b$, sont asymptotes.

La courbe OY au point $y = b$, où la tangente a pour coefficient angulaire :

dans la première,

$$-\frac{b^2 \sin \theta}{m^2}$$

dans la deuxième,

$$- \frac{b^2 \sin \theta}{m^2}$$

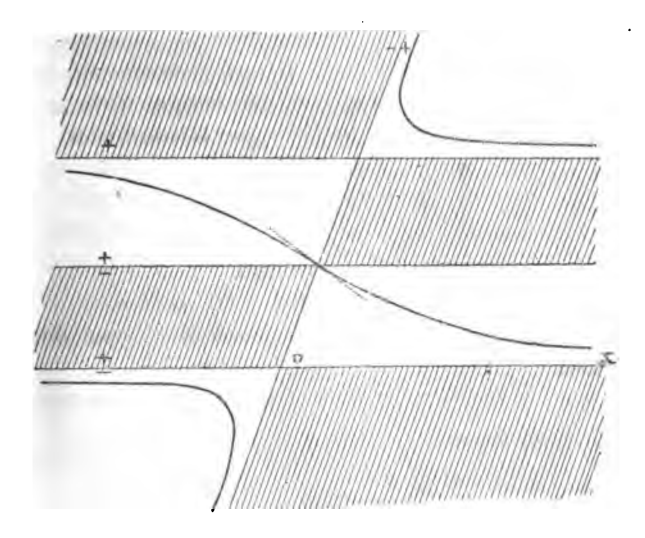


Fig 8.

Ces points sont points d'inflexion, car la tangente a trois points communs avec la courbe.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. de Kerdrel, à Kéruzoret; Giat, à Moulins.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Niewenglowski à M. G. de Longchamps.

.... M. Walecki a donné dans le numéro de janvier une vérification très simple de la règle de multiplication de deux déterminants. Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que le même procédé peut être appliqué, sans modification, au cas où l'on donne deux tableaux rectangulaires au lieu de deux déterminants.

QUESTIONS PROPOSÉES

94. — Nous proposons à nos jeunes lecteurs de démontrer, avec simplicité et élégance, au moyen des relations entre les coefficients et les racines, que la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0$$

exprime que les racines de l'équation

$$Ax^4 - 4Bx^3 + 6C \cdot x^2 - 4Dx + E = 0$$

sont en proportion harmonique, c'est-à-dire, sont liées par la relation

$$2.(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$$

(E. V.)

95. — L'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles et *de même signe*, démontrer que l'équation

$$a_0 \cos\varphi + a_1 \cos(\varphi + \theta)x + a_2 \cos(\varphi + 2\theta)x^2 + \ldots + a_n \cos(\varphi + n\theta)x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, quels que soient les angles φ et θ.

(E. Laguerre.)

96. — On considère une strophoïde droite S; par le sommet de la courbe, son point double, et un point M mobile sur S, on fait passer une circonférence Δ; enfin par M on mène une parallèle à l'asymptote de S et cette parallèle rencontre Δ en un point I. Trouver le lieu de ce point.

Ce lieu est une circonférence; on donnera, après la solution analytique de ce problème, une démonstration géométrique du résultat trouvé.

(G. L.)

97. — Soit M un point d'une strophoïde, ayant pour sommet O et pour point double O'. Du point O' comme centre avec O'O pour rayon décrivons un cercle Δ. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur OO', cette droite ren-

contre Δ en deux points parmi lesquels on distinguera particulièrement le point H qui jouit de la propriété que MH = MO.

1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition;

2° Démontrer que si les perpendiculaires à OM, au point O et les tangentes en H à Δ se coupent en T, TM est la tangente à la strophoïde;

3° Démontrer que si l'on prend MH′ = MH, le lieu du point H′ est une cissoïde.

4° Reconnaître que la tangente au point H′ à la cissoïde passe, elle aussi, par le point T; et faisant alors abstraction de la strophoïde considérée d'abord, déduire des remarques précédentes une construction de la tangente à la cissoïde.

98. — On considère une parabole fixe, et un cercle de rayon constant, mais variable de position. On suppose que le cercle se déplace dans le plan sous la condition que, dans chacune de ses positions, le cercle mobile et la parabole fixe aient un système de tangentes communes rectangulaires. On propose de trouver et d'étudier le lieu que décrit le centre du cercle quand il occupe dans le plan toutes les positions compatibles avec la condition donnée. *(E. B.)*

99. — On donne dans le plan une droite fixe DD′ et deux points fixes O et A. — Par le point O on mène deux cercles tangents tous deux à la droite fixe DD′ et à une autre droite quelconque issue du point fixe A. On demande d'étudier le lieu décrit par le second point M d'intersection de ces deux cercles quand la droite AB tourne autour du point A.

(E. B.)

100.—On donne une circonférence fixe dont le centre est C et un point O dans son plan. Par le point O on mène une tangente OA au cercle C. Par un point B pris sur cette droite OA on mène une perpendiculaire à OA, et une parallèle BD à la droite OC, D désignant l'un des points où cette parallèle rencontre le cercle C. Enfin du point O comme centre, avec OD pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe en M et M′ la perpendiculaire élevée à OA en B. On demande d'étudier le lieu des points M et M′ quand le point B se déplace sur la tangente OA. *(E. B.)*

101. — Construire, point par point, au moyen d'une équerre, la courbe qui correspond à l'équation

$$x^{4n} = \frac{y}{h}(y - h)^{4n},$$

n désignant un nombre entier positif. *(G. L.)*

102. — On donne une ellipse E, et l'on considère la droite Δ, qui a pour équation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit M un point pris sur l'ellipse, et soit Δ' la tangente en ce point; Δ' rencontre Δ en un point P. On joint ce point P au sommet de droite A, et on élève à AP une perpendiculaire Δ'' par le point A. Démontrer que la droite AM est bissectrice de l'angle formé par Δ'' avec le grand axe AA'. Déduire de cette remarque une construction de la tangente en un point de l'ellipse au moyen de la règle et de l'équerre. On suppose que les sommets de la courbe sont seuls connus. *(G. L.)*

103. — Lieu des sommets des paraboloïdes qui passent par une parabole donnée et par deux points donnés symétriques par rapport au plan de la parabole. On distinguera les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques et celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. *(E. Amigues.)*

Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 2786-4.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE FRACTIONS CONTINUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, v. t. VII, p. 197, 213, 241, 269; et t. VIII, p. 25.)

XIX. — L'étude complète des fractions continues que nous avons définies au début de ce mémoire, nous entraînerait très loin, et bien au delà des limites qui nous sont tracées dans ce journal. Nous voulons seulement montrer, en terminant ce travail, comment on peut, dans certains cas particuliers tout au moins, rapprocher les fractions continues étudiées ici, de celles qu'on désigne habituellement sous cette qualification et en prenant le mot *fractions continues* dans son sens élémentaire le plus général (Alg. Laurent, t. II, p. 143).

XX. — Plaçons-nous dans le cas particulier qui correspond aux hypothèses suivantes :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1,$$
$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 2p - 1,$$
$$q = 1.$$

Le paramètre p reste seul arbitraire et les considérations qui suivent s'appliquent uniquement aux irrationnelles de la forme

$$\sqrt{p^2 - 1}.$$

Nous nous proposons donc de développer la plus petite racine de l'équation

$$x^2 - 2px + 1 = 0. \qquad (1)$$

La fonction X_n (§ XV, formule D) est donnée par la formule

$$X_n = A + Bx'^n + Cx''^n \qquad (2)$$

et les formules établies plus haut (§ XVI) donnent

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{x' - x''}, \quad C = -\frac{1}{x' - x''} \ (*) \qquad (3)$$

On a aussi :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2p - 1, \ldots$$
$$\beta_0 = 1 = \alpha_1; \quad \beta_1 = 2p - 1 = \alpha_2, \ldots$$

et, en général,

$$\beta_{n-1} = \alpha_n. \qquad (4)$$

D'après la définition des fonctions X_n et Y_n, définition qui correspond aux formules :

$$X_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n,$$

nous avons

$$X_n = 1 + Y_{n-1}. \qquad (5)$$

Il suffit donc de calculer les fonctions X_n pour avoir les fonctions Y_n, et pour calculer, par suite, les réduites successives.

La fonction X_n, d'après les formules (2) et (3), est donnée par l'égalité

$$X_n = 1 + \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''},$$

ou par la suivante,

$$X_n = 1 + U_n, \qquad (6)$$

en posant, avec M. Ed. Lucas (**),

$$U_n = \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''}.$$

Nous rattachons ainsi, dans le cas particulier que nous examinons, les réduites de nos fractions continues à ces fonctions U_n que M. Ed. Lucas a nommées *fonctions simplement périodiques* pour marquer, croyons-nous, qu'elles jouissent des relations de récurrence qui sont vérifiées par les fonctions $\sin nx$ et $\cos nx$.

(*) La formule que donne C, au paragraphe cité, renferme une erreur typographique. Au lieu de

$$C = \frac{(x''\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x' - x'')(x' - 1)},$$

il faut lire

$$C = \frac{x''(\alpha_1 - \alpha_0 x')}{(x' - x'')(x' - 1)}.$$

(**) *Nouvelle correspondance mathématique* (1877, p. 370).

XXI. Relation de récurrence entre deux fonctions U_n consécutives. — Nous allons montrer qu'entre deux fonctions U_n consécutives existe la relation identique

$$U_n^2 - (x' + x'')U_nU_{n-1} + x'x''U_{n-1}^2 = (x'x'')^{n-1}.$$

En effet, des égalités

$$U = \frac{x'^n - x''^n}{x' - x''}, \qquad U_{n-1} = \frac{x'^{n-1} - x''^{n-1}}{x' - x''},$$

on déduit, successivement,

$$U_n - x'U_{n-1} = x''^{n-1},$$
$$U_n - x''U_{n-1} = x'^{n-1};$$

et, par combinaison,

$$(U_n - x'U_{n-1})(U_n - x''U_{n-1}) = (x'x'')^{n-1}. \qquad \text{(A)}$$

C'est, sous une autre forme, la relation annoncée.

XXII. Relation entre deux fonctions $\frac{X_n}{Y_n}$ consécutives. — Posons, pour abréger l'écriture,

$$\xi_n = \frac{X_n}{Y_n};$$

nous allons reconnaître, en nous appuyant sur l'identité (A), établie ci-dessus, qu'il existe une relation homographique entre deux fonctions ξ consécutives.

Nous avons démontré, plus haut, que nous avions (§ XX, éq. 6)

$$X_n = 1 + U_n$$

et (§ XX, éq. 5)

$$X_n = 1 + Y_{n-1}.$$

Cette dernière relation donne

$$Y_n = X_{n+1} - 1$$

ou, d'après la première,

$$Y = U_{n+1}.$$

Nous pouvons donc poser

$$\xi_n = \frac{1 + U_n}{U_{n+1}}. \qquad \text{(B)}$$

D'autre part, la relation (A) appliquée au cas particulier qui nous occupe, et qui suppose $x'x'' = 1$, donne (*)

$$u_n^2 - 2pu_n u_{n-1} + u_{n-1} = 1.$$

(*) Pour éviter toute confusion, nous désignons ici par u_n, la onction U. quand on suppose $x'x'' = 1$.

Cette égalité peut se transformer de la manière suivante. Ajoutons et retranchons $2u_n u_{n-1}$, et nous avons

$$(u_n + u_{n-1})^2 - 1 = 2(p+1)u_n u_{n-1}$$

ou

$$(u_n + u_{n-1} + 1)(u_n + u_{n-1} - 1) = 2(p+1)u_n u_{n-1}$$

ou, encore,

$$\left(\frac{1 + u_{n-1}}{u_n} + 1\right)\left(1 - \frac{1 - u_n}{u_{n-1}}\right) = 2(p+1). \quad (A')$$

Mais, d'après l'égalité (B), on peut écrire

$$\xi_{n-1} = \frac{1 + u_{n-1}}{u_n}$$

et

$$\xi_{n-2} = \frac{1 + u_{n-2}}{u_{n-1}}.$$

Cette dernière égalité peut être transformée en observant que l'on a

$$u_n - 2pu_{n-1} + u_{n-2} = 0$$

et, par suite,

$$\xi_{n-2} = \frac{1 + pu_{n-1} - u_n}{u_{n-1}} = 2p + \frac{1 - u_n}{u_{n-1}}.$$

D'après cela, la relation (A') devient

$$(\xi_{n-1} + 1)(2p + 1 - \xi_{n-2}) = 2(p+1). \quad (C)$$

C'est la relation homographique annoncée.

XXIII. Développement de ξ_n en fraction continue *(sens ordinaire)*. — La relation (C) (en changeant n en $n+1$) donne

$$1 + \xi_n = \frac{2(p+1)}{2(p+1) - (1 + \xi_{n-1})}.$$

En appliquant, successivement, la propriété qu'exprime cette égalité à $n-1$, $n-2$, etc., on a

$$1+\xi_n = \cfrac{2(p+1)}{2(p+1) - \cfrac{2(p+1)}{2(p+1) - \cfrac{(2p+1)}{(2p+1)}}}$$

$$\vdots$$

$$+ 2(p+1) - \frac{p+1}{p}.$$

Dans ce développement, le nombre des barres horizontales est égal à n, et le dernier élément $\frac{p+1}{p}$ a été calculé en observant que l'on a

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

et, par suite,

$$\xi_0 = 1.$$

On peut ainsi, et c'est le point que nous avons voulu mettre en lumière, rapprocher, du moins dans des cas particuliers, le calcul des irrationnelles du second degré par notre méthode du calcul de ces expressions par le développement en fractions continues ordinaires.

On trouvera plus loin, dans l'analyse que nous faisons d'un mémoire de M. Landry, d'autres considérations sur le calcul des irrationnelles du second degré.

SUR LA SOMME DES SINUS OU COSINUS
DE TROIS ARCS
DONT LA SOMME EST UN MULTIPLE DE LA DEMI-CIRCONFÉRENCE

Par M. **G. Fouret**, répétiteur à l'École polytechnique.

I. — Les tangentes trigonométriques de trois arcs, a, b, c, dont la somme est un multiple quelconque $k\pi$, positif ou négatif, de la demi-circonférence, vérifient la relation bien connue

$$\text{tang}\, a + \text{tang}\, b + \text{tang}\, c = \text{tang}\, a\ \text{tang}\, b\ \text{tang}\, c. \quad (1)$$

Si, au lieu de la somme des tangentes, on considère la somme des sinus ou des cosinus des mêmes arcs, on arrive, par des transformations d'ailleurs fort simples, à des résultats qui diffèrent, suivant le résidu de k par rapport au module 4.

Posons

$$k = 4m + r (r = 0, 1, 2, 3),$$

m désignant un entier positif ou négatif. On aura, en donnant successivement à r les quatre valeurs indiquées, les

quatre couples de relations suivantes (*):

$$r=0\left\{\begin{aligned} \sin a+\sin b+\sin c &= -4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\\ 1+\cos a+\cos b+\cos c &= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\end{aligned}\right.$$

$$r=1\left\{\begin{aligned} \sin a+\sin b+\sin c &= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\\ -1+\cos a+\cos b+\cos c &= 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\end{aligned}\right.$$

$$r=2\left\{\begin{aligned} \sin a+\sin b+\sin c &= 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\\ 1+\cos a+\cos b+\cos c &= -4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\end{aligned}\right.$$

$$r=3\left\{\begin{aligned} \sin a+\sin b+\sin c &= -4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\\ -1+\cos a+\cos b+\cos c &= -4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\end{aligned}\right.$$

On reconnaît aisément que ces quatre couples de relations, bien qu'exigeant chacune un calcul spécial, se déduisent des deux formules

$$\left.\begin{aligned} \sin a+\sin b+\sin c &= 4\sin\frac{r\pi-a}{2}\sin\frac{r\pi-b}{2}\sin\frac{r\pi-c}{2}\\ (-1)^r+\cos a+\cos b+\cos c &= 4\cos\frac{r\pi-a}{2}\cos\frac{r\pi-b}{2}\cos\frac{r\pi-c}{2},\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

lorsqu'on y fait successivement $r=0, 1, 2, 3$.

II. — Nous allons démontrer les relations (2) d'une manière plus directe. Nous ferons usage, dans ce but, de la formule d'Euler

$$e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

dont on déduit immédiatement

$$\cos\theta=\frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2},\quad \sin\theta=\frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{2i}.$$

(*) Nous laissons au lecteur le soin de les démontrer.

Ajoutons membre à membre les relations (2), après avoir multiplié les deux membres de la première par i; nous obtenons

$$(-1)^r + e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')(\beta + \beta')(\gamma + \gamma') - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\gamma - \gamma'),$$

en posant pour abréger

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = e^{\frac{r\pi - a}{2}} & \alpha' = e^{\frac{-r\pi + a}{2}} \\ \beta = e^{\frac{r\pi - b}{2}} & \beta' = e^{\frac{-r\pi + b}{2}} \\ \gamma = e^{\frac{\pi - c}{2}} & \gamma' = e^{\frac{-r\pi + c}{2}} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Mais le second membre de (3), quels que soient α, β, γ, α', β', γ', est identique à

$$\alpha'\beta'\gamma' + \alpha'\beta\gamma + \alpha\beta'\gamma + \alpha\beta\gamma'.$$

En y remplaçant α, β, γ, α', β', γ' par les valeurs (4), on obtient

$$e^{(-3r\pi + a + b + c)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi - b - c + a)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi - c - a + b)\frac{i}{2}} + e^{(r\pi - a - b + c)\frac{i}{2}}.$$

Or cette expression se réduit identiquement au premier membre de la relation (3), si l'on suppose

$$a + b + c = k\pi = (4m + r)\pi, \tag{5}$$

et que l'on tienne compte des identités

$$e^{2m\pi i} = 1, \qquad e^{r\pi i} = (-1)^r.$$

Les relations (2) se trouvent ainsi démontrées dans toute leur généralité.

III. — Cherchons si, inversement, en supposant vérifiées les relations (2) ou la relation (3) qui leur est équivalente, on est en droit d'en conclure

$$a + b + c = k\pi,$$

k désignant un entier quelconque, positif ou négatif. A cet effet, nous pouvons toujours poser, quels que soient a, b, c,

$$a + b + c = (4m + r)\pi + \omega,$$

m et r ayant les significations définies plus haut, et ω désignant un angle positif inférieur à π.

On voit alors facilement que la relation (3) peut se mettre

sous la forme très simple

$$\left[e^{\frac{\omega}{2}i} - 1\right]\left[e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} - e\right] = 0.$$

Or la dernière relation se dédouble en

$$e^{\frac{\omega}{2}i} = 1 \tag{6}$$

et

$$e^{ai} + e^{bi} + e^{ci} = e^{\left(r\pi + \frac{\omega}{2}\right)i}. \tag{7}$$

De (5) on conclut $\omega = 0$, puisque ω est compris entre zéro et π. On retrouve ainsi la condition moyennant laquelle nous avons démontré les formules (2). Mais nous venons de trouver que cette condition n'est pas nécessaire pour que ces formules (2) aient lieu. Il suffit, en effet, qu'à défaut de (4) la relation (6) soit vérifiée.

Cette relation (6) se subdivise d'ailleurs en deux autres qui sont (*)

$$\cos a + \cos b + \cos c = (-1)^r \cos \frac{\omega}{2}$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^r \sin \frac{\omega}{2}$$

Ainsi, contrairement à ce qui a lieu pour la formule (1) rappelée au début de cette note, laquelle ne peut être vérifiée que par trois angles dont la somme soit un multiple de π, les relations (2) peuvent être vérifiées séparément ou ensemble par une infinité de combinaisons de trois angles qui ne remplissent pas cette condition.

Remarques. — 1° Des relations (2) divisées membre à membre, on déduit

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{(-1)^r + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$= \operatorname{tang} \frac{r\pi - a}{2} \operatorname{tang} \frac{r\pi - b}{2} \operatorname{tang} \frac{r\pi - c}{2}.$$

2° Les relations (2) s'appliquent à des équimultiples quelconques des angles a, b, c. De

(*) La détermination des systèmes de valeurs de a, b et c satisfaisant à la fois à ces deux équations est un problème d'analyse indéterminée que nous ne résoudrons pas ici, mais qui est évidemment possible.

$$a + b + c = (4m + r)\pi \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

on conclut, en effet, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$na + nb + nc = (4m' + r')\pi \quad (r' = 0, 1, 2, 3),$$

m' étant un entier.

Cette simple remarque fournit immédiatement, entre les trois angles d'un triangle, les deux relations très générales qui suivent, et dans lesquelles n désigne un entier quelconque, r le résidu de n par rapport au module 4 :

$$\sin na + \sin nb + \sin nc$$
$$= 4 \sin \frac{r\pi - na}{2} \sin \frac{r\pi - nb}{2} \sin \frac{r\pi - nc}{2}$$
$$(-1)^n + \cos na + \cos nb + \cos nc$$
$$= 4 \cos \frac{r\pi - na}{2} \cos \frac{r\pi - nb}{2} \cos \frac{r\pi - nc}{2}$$

auxquelles on peut joindre

$$\operatorname{tang} na + \operatorname{tang} nb + \operatorname{tang} nc = \operatorname{tang} na \operatorname{tang} nb \operatorname{tang} nc.$$

On déduirait immédiatement des dernières formules, en y faisant $n = 1, 2, 3, 4$, des relations bien connues que l'on rencontre dans la plupart des traités de trigonométrie.

NOTE SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Weill**, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

(*Suite et fin*, voir page 30.)

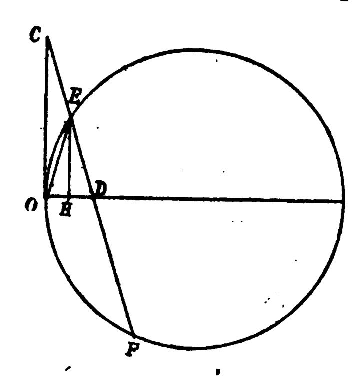
Théorème XXV. — *Soient C et D les points où une tangente variable à l'hypocycloïde rencontre deux tangentes rectangulaires à la courbe, se coupant en O sur le cercle des neuf points, on aura*

$$\frac{\overline{CD}^2}{DO} = \text{const.}$$

si CO *est tangente en* O *au cercle des neuf points.*

D'après les propriétés connues des hypocycloïdes, il existe sur le cercle des neuf points trois points O, O′, O″, formant les

sommets d'un triangle équilatéral, et où la courbe touche le cercle. Soit O un de ces points et OD le diamètre passant en O ; les arcs OE et OF étant l'un moitié de l'autre, on a



$$OE = EG = ED.$$

Abaissons sur le diamètre la perpendiculaire EH. On aura

$$\frac{\overline{OE}^2}{OH} = 2R;$$

d'où

$$\frac{\overline{CD}^2}{OD} = \frac{4\overline{OE}^2}{2OH} = 4R.$$

Théorème XXVI. — *Réciproquement, si une droite variable* CD *intercepte sur droites rectangulaires deux segments* OD, OC *tels que l'on ait*

$$\frac{\overline{CD}^2}{DO} = \text{const.} = l,$$

la droite CD *enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Prenons OE = OC et menons BEA perpendiculaire à CD, et CA′ perpendiculaire sur CD. Comme OB = OC, on a OA = OA′, donc

$$\frac{\overline{AB}^2}{AO} = l.$$

Menons EK perpendiculaire sur EO. On a

$$DEK = \frac{\pi}{2} - DEO = \frac{\pi}{2} - DCO = EDK.$$

Donc

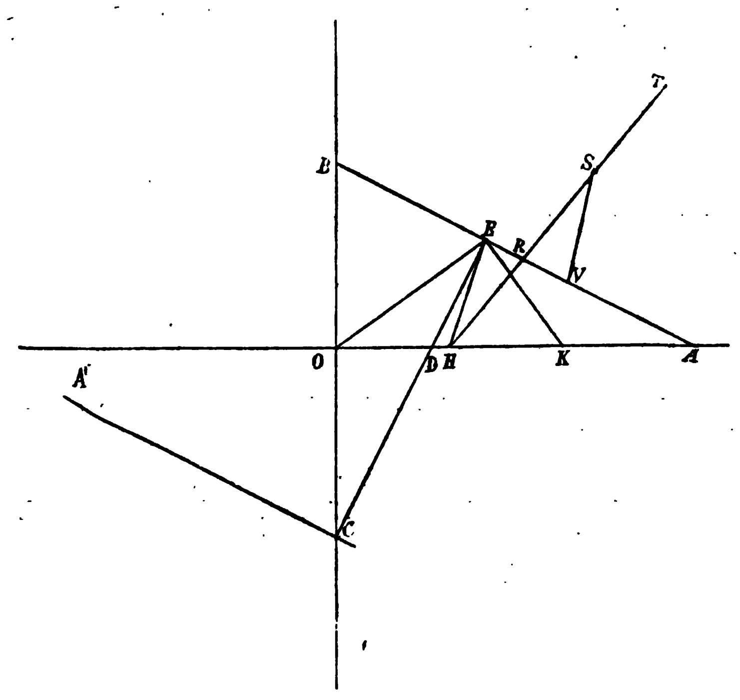
$$KD = KE = KA;$$

ddon

$$OD + 2DK = OA$$
$$OD + OA = 2OK$$
$$OK = \frac{OD + OA}{2} = l.$$

Le point K est donc fixe, et le point E se trouve sur le cercle décrit sur OK comme diamètre. Du point H, milieu

de OK, avec HO comme rayon, décrivons un cercle, il passera par E et coupera BA en E et R. Prolongeons HR et prenons ST = SR = RH, et SV = SR.



Désignons par α l'angle OCD = OED = OAB.

On a

$$DOE = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

d'où

$$OHE = \pi - 2\,DOE = 4\alpha.$$

On a aussi

$$KEA = \alpha$$
$$KEH = HKE = 2\alpha,$$

donc

$$HEA = 3\alpha;$$

d'où

$$HRE = 3\alpha,$$

et

$$RHA = 2\alpha,$$
$$TSV = 6\alpha = 3RHA.$$

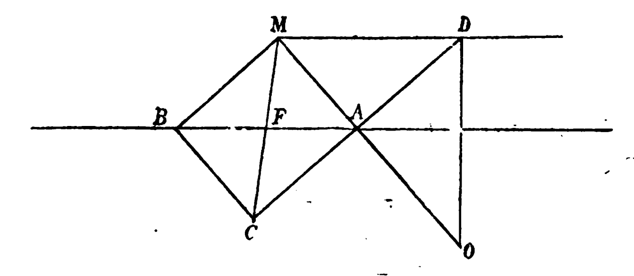
Donc V appartient à une hypocycloïde à trois rebroussements ayant, au point V, AB pour tangente. Le point E appartenant au cercle des neuf points correspondant à AB considérée comme droite de Simson, il en résulte que EDC est aussi droite de Simson, et, par suite, touche la même hypocycloïde. C. Q. F. D.

Théorème XXVII. — *Étant donnés un cercle, un diamètre, et la tangente à l'extrémité, la droite qui joint les projections d'un point du cercle sur ces deux droites fixes, a pour enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème n'est qu'un autre énoncé du précédent.

Théorème XXVIII. — *L'enveloppe des axes des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème XXIV. On peut aussi le démontrer directement en s'appuyant sur le théorème XXVII.



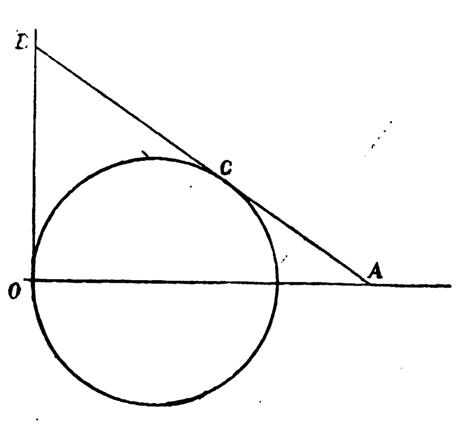
Soit AB l'axe de la parabole, M un point de la courbe, MA la normale; on obtient le point O, centre de courbure en M, d'après une construction connue, en menant la parallèle MD à l'axe, la perpendiculaire en A à AM, laquelle rencontre en D la parallèle à l'axe, et enfin la perpendiculaire DO à l'axe. Ceci posé, prolongeons DA d'une longueur égale à elle-même en C, et menons la tangente MB à la parabole, MC passera

par le milieu de AB, qui est le foyer. C est un point du cercle décrit sur OM comme diamètre.

Revenant aux données de la question, on voit que le cercle décrit sur OM comme diamètre est fixe, ainsi que la tangente MB en M, point fixe donné, par lequel doit passer la parabole variable ayant pour cercle osculateur donné en M le cercle de centre O. Dès lors, l'axe AB passe par les projections du point C sur les deux droites fixes MB, MO; donc.....

On peut remarquer que le lieu du foyer èst le cercle décrit sur ME comme diamètre, E étant le milieu de MO.

Théorème XXIX. — *Soient* OA *le diamètre d'un cercle,* OB *la tangente à l'extrémité,* AB *une tangente variable touchant le cercle en* C *et rencontrant en* A *et* B *les droites fixes. La parabole qui touche les deux droites en* A *et* B *a pour enveloppe l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est l'enveloppe de la droite joignant les projections de* C *sur les droites fixes.*



Ce théorème est une conséquence du théorème XXVII.

Théorème XXX. — *Étant donné un triangle* ABC, *et* H *le point de concours des hauteurs: à partir du sommet* C, *prenons sur le prolongement de la hauteur une longueur* CE = DH *et par le point* E *menons une parallèle à* AB. *En opérant de même sur les trois hauteurs, nous formerons un triangle* A'B'C' *homothétique inverse de* ABC.

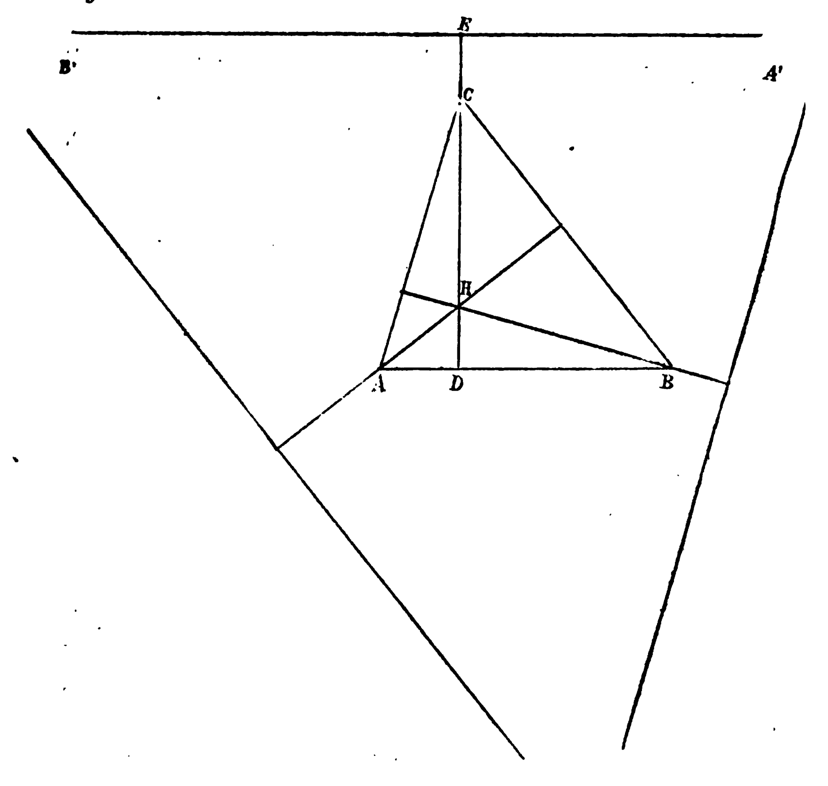
1° Les côtés du triangle A'B'C' *sont trois fois plus grands que ceux de* ABC.

2° Les cercles des neuf points des deux triangles sont concentriques.

3° *Le centre commun de ces deux cercles est le centre d'homothétie des deux triangles.*

4° *Étant donnée une droite de Simson* PQ *relative à un point* M *et au triangle* ABC, *si* Q *est le point où elle touche son enveloppe, la perpendiculaire à* PQ *au point* Q *est droite de Simson relative au triangle* A'B'C' *et à un point* M'.

5° MM' *passe par le point de concours des hauteurs du triangle* A'B'C'.



Nous laissons aux jeunes lecteurs du journal le soin de démontrer ce dernier théorème. Il est à remarquer que la quatrième partie du théorème est un cas particulier d'un théorème bien connu, savoir, que la développée d'une hypocycloïde est une hypocycloïde semblable.

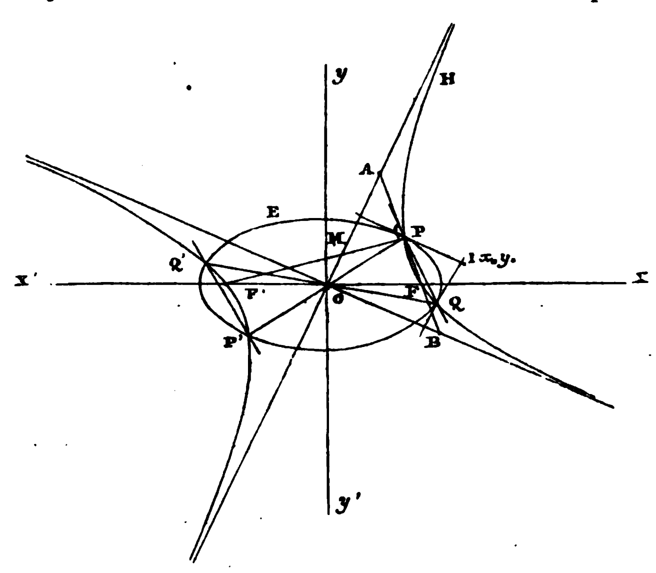
QUESTION 23

Solution par M. Léon Clément, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse E *rapportée à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et un diamètre quelconque PP′. *Par les extrémités* P, P′ *de ce diamètre et par les foyers de l'ellipse donnée, on fait passer une hyperbole équilatère* H, *qui rencontre* E *en deux points diamétralement opposés* Q, Q′. *Ceci posé, aux points* P, Q *on mène les tangentes à* E; *ces droites se rencontrent en un point* I :



1° Trouver le lieu de ce point quand PP′ *tourne autour du centre de* E. *Ce lieu est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.*

2° Au point I, *on abaisse des perpendiculaires sur les asymp-*

totes de H : *trouver le lieu de ces projections. Ce lieu est la podaire du centre de l'ellipse* E.

3° On demande de vérifier ces deux résultats par des considérations géométriques, en établissant d'abord le théorème élémentaire suivant : on considère un triangle ABC, *et sur la base* BC, *deux points* D *et* D' *également éloignés du milieu de* BC. *Soit* D'' *le symétrique de* D *par rapport au point* A. *La droite* D'D'' *rencontre* AC *en un point* M ; *la droite qui va de* D' *au milieu de* MC *est parallèle à* AB. (G. L.)

1. — Soient $x_0 y_0$ les coordonnées du point I. La polaire PQ de ce point a pour équation

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation de P'Q symétrique de PQ par rapport au centre O est

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + 1 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des droites PQ, P'Q' et de l'ellipse est

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Exprimons que c'est une hyperbole équilatère :

$$\frac{\lambda}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{\lambda}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0\,;$$

d'où

$$a^2 b^2 \lambda = -\frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{a^2 + b^2}.$$

Exprimons en outre qu'elle passe par les foyers F, F' de l'ellipse :

$$\lambda\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) + \frac{c^2 x_0^2}{a^4} - 1 = 0,$$

$$\lambda\,\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 x_0^2 - a^4}{a^4},$$

d'où

$$a^2 b^2 \lambda = c^2 x_0 - a^4.$$

En égalant les deux valeurs de $a^2 b^2 \lambda$ on a l'équation qui lie x_0 et y_0 :

$$c^2x_0 - a^4 + \frac{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}{a^2 + b^2} = 0$$

ou $$(a^4 - b^4)\,x_0^2 - a^4(a^2 + b^2) + b^4x_0^2 + a^4y_0^2 = 0.$$

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

Le lieu du point I est donc le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

2. — L'équation des asymptotes des coniques représentées par l'équation (1) est

$$\left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^4}\right)x^2 + \frac{2x_0y_0}{a^2b^2}\,xy + \left(\frac{\lambda}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)y^2 = 0$$

ou, en multipliant par a^2b^2,

$$\left(b^2\lambda + \frac{b^2x_0^2}{a^2}\right)x^2 + 2x_0y_0xy + \left(a^2\lambda + \frac{a^2y_0^2}{b^2}\right)y^2 = 0.$$

Remplaçons λ par

$$\frac{c^2x_0 - a^4}{a^2b^2}.$$

Le coefficient de x^2 devient égal à

$$\frac{c^2x_0^2 - a^4 + b^2x_0^2}{a^2} = x_0^2 - a^2,$$

et en tenant compte de la relation $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$, le coefficient de x^2 est $b^2 - y_0^2$.

Donc l'équation des asymptotes de l'hyperbole équilatère H est

$$(a^2 - x)\,y^2 + 2x_0y_0xy + (b^2 - y_0{}^2)x^2 = 0,$$

et par conséquent l'équation aux coefficients angulaires des asymptotes est

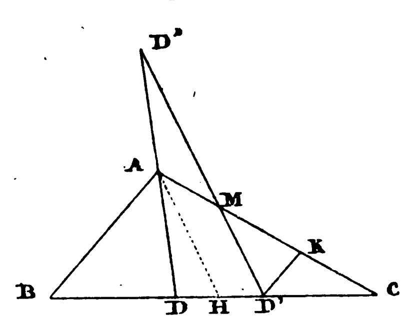
$$(a^2 - x_0^2)\,\alpha^2 + 2x_0y_0\alpha + b^2 - y_0^2 = 0.$$

Or, comme on le sait, cette équation donne aussi les coefficients angulaires des tangentes menées du point x_0y_0 à l'ellipse; donc ces tangentes sont parallèles aux asymptotes de H, et par suite le lieu des projections du point I sur les asymptotes est évidemment la podaire du centre de l'ellipse.

3. — Avant de traiter la question géométriquement, démontrons d'abord le théorème élémentaire énoncé. Soit H milieu de BC, et K le milieu de MC (*fig. 2*).

La droite AH est évidemment parallèle à D'D''. Par suite les deux triangles CMD', CAH sont semblables et donnent

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CD'}{CH}.$$



Divisons par 2 les deux membres de cette égalité, nous aurons

$$\frac{CK}{CA} = \frac{CD'}{CB}.$$

Ce qui prouve que D'K est parallèle à BA:

C. Q. F. D.

Remarquons que si l'angle BAC est droit, la droite D'K est perpendiculaire au milieu de MC, et par suite elle se confond avec la bissectrice de l'angle MD'C.

Ceci posé, revenons à la question. Menons PF *(fig. 1)*. Soient A et B les points d'intersection de cette droite avec les asymptotes. Les points P et F sont également éloignés du milieu de AB: car on sait que PA = FB. Joignons le point F', symétrique de F par rapport au point O, au point P. La tangente IP à l'ellipse est bissectrice de l'angle APF'; et comme l'angle AOB est droit, la droite IP est, d'après la remarque précédente, parallèle à OB. On démontrerait de même que la tangente IQ est parallèle à OA. Les tangentes considérées étant respectivement parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère H, on reconnaît de suite les deux théorèmes à démontrer.

VARIÉTÉS

Nous publions, à l'usage de nos lecteurs, le texte même de Newton sur la méthode d'approximation qui porte le nom de cet illustre géomètre.

On lit (page 10 du premier volume des *Opuscules*, édi-

tion de 1774, publiée à Lausanne et à Genève, par Jean Castillion, chez Marc-Michel Bousquet et Cie) :

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primùm illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda : et sit 2, numerus qui minus quam decimâ sui parte differt à Radice quæsitâ. Tum pono $2 + p = y$, et substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, et inde nova prodit

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

cujus radix p exquirenda est, ut Quotienti addatur. Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10b - 1 = 0$, sive $p = 0,1$, prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in Quotiente, et suppono $0,1 + q = p$, et hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$$

et cum $11,23q + 0,061 = 0$ veritati prope accedat, sive fere sit q æqualis $-$ 0,0054 (dividendo nempe donec tot elicientur figuræ quot locis primæ figuræ hujus et principalis Quotientis exclusive distant) scribo $-$ 0,0054 in inferiori parte Quotientis, cùm negativa sit.

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, et operationem sic produco quousque placuerit. Verùm si ad bis tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, scilicet primo ejus Termino (q^3) propter exilitatem suam neglecto, et prodit

$$6,3\,.\,r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$$

fere, sive (rejecto $6,3r^2$)

$$r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$$

fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab affirmativa subducens habeo 2,09455147 Quotientem quæsitum.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, et operam sub fine, ut hic factum fuit, levabis, si primos ejus Terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quòd in hoc exemplo, si dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem

$$6p^2 + 10p - 1 = 0$$

et ejus radicis primam Figuram in Quotiente scripsissem; et secundam vel tertiam Quotientis Figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimò resultante quadratum coefficientis penultimi Termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem Termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minus, præsertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si Figuras omnes Quotientis addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem Radicum, ex tribus ultimis Terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras : isto enim modo Figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, et usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, undè cum opus sit, in memoriam facile revocatur.

A la page 37 du même volume, Newton reproduit le même procédé en l'abrégeant, et reproduit aussi le diagramme suivant qui accompagne le premier texte.

Nous donnons ici ce diagramme :

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$
		$- 0,00544853$
		$+ 2,09455147 = y$
$2 + p = y$	y^3	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$- 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	p^3	$0,001 + 0,03q \quad + 0,3q^2 + q^3$
	$+ 6p^2$	$+ 0,06 \quad + 1,2 \quad + 6,0$
	$+ 10p$	$+ 1 \quad + 10$
	$- 1$	$- 1$
	Summa	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$- 0,0054 + r = q$	$+ 6,3q^2$	$+ 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+ 11,23q$	$- 0,060642 \quad + 11,23$
	$+ 0,61$	$+ 0,061$
	Summa	$+ 0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$

On voit donc que, dès l'origine, la méthode de Newton consiste, en désignant par a une valeur approchée de la racine, à poser :

$$x = a + y$$

puis dans l'équation transformée :

$$f(a + y) = 0$$

négliger toutes les puissances de l'inconnue y au delà de la première; ce qui réduit l'équation à : $f(a) + y f'(a) = 0$, et donne pour la formule de correction :

$$[z = - f(a) : f'(a)]$$

C'est donc à ces quelques mots bien simple que se réduit l'exposé historique de la méthode d'approximation de Newton.

La discussion qui suit l'exposé historique a été faite trop souvent déjà; et nous pouvons nous dispenser de la reproduire ici.

E. V.

QUESTIONS PROPOSÉES

104. — Une surface du second degré a un centre donné, et passe par un cercle donné. Lieu de ses sommets. On distinguera les points du lieu suivant la nature de la surface dont ils sont les sommets. *(E. Amigues.)*

105. — Lieu du centre d'une surface de second ordre qui passe par une ellipse donnée et par deux points symétriques par rapport au plan de cette ellipse. Le lieu cherché est une surface que l'on décomposera en régions dont les points soient des centres de surfaces de même genre.

(E. Amigues.)

106. — Si A et A′ sont deux polynômes de degré n à coefficients réels, et si B et B′ sont deux polynômes de degré moindre que $2n$, on ne peut avoir l'identité

$$A^2 + B = A'^2 + B'$$

sans avoir les deux suivantes :

$$A = A',$$
$$B = B'.$$

(E. Amigues.)

107.— On sait que le lieu du centre d'une hyperbole équilatère inscrite à un triangle est un cercle ; faire voir que ce cercle est conjugué par rapport au triangle.

(E. Amigues.)

108. — On donne un triangle rectangle et isoscèle, et on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. Par ce dernier, on mène la tangente au cercle. Lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de l'hyperbole correspondante.

(E. Amigues.)

109. — Condition pour que les équations de quatre droites représentent des génératrices d'un hyperboloïde.

(E. Lemoine.)

110. — Condition pour que les équations de trois droites représentent des génératrices d'un paraboloïde.

(E. Lemoine.)

111. — Les points de contact des tangentes menées à une développante de cercle par un point quelconque de son plan, appartiennent à un limaçon de Pascal. *(G. Fouret.)*

112. — On considère un triangle rectangle ABC inscrit dans une parabole, et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe; trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle. *(G. L.)*

113. — On donne un point fixe O, et deux autres points : l'un A fixe, et l'autre B mobile mais restant à une distance invariable du point O; on demande le lieu des sommets et des foyers des ellipses qui ont pour centre commun le point O, et sont telles en outre que A et B soient les extrémités de deux diamètres conjugés. *(E. V.)*

114. — Parmi toutes les coniques circonscrites à un même triangle ABC, on considère seulement la série de celles pour chacune desquelles les normales en A, B, C, sont concourantes, et l'on demande le lieu du point de concours. *(E. V.)*

115. — Construire la courbe représentée par l'équation :

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0. \qquad (E.\ V.)$$

116. — Construire la podaire de l'origine relativement à la courbe que représente l'équation :

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0. \qquad (E.\ V.)$$

117. — Étudier les formes successives de la courbe représentée par l'équation :

$$x^3 + y^3 - 3axy + \lambda = 0.$$

quand on fait varier λ. *(E. V.)*

118. — Trouver la relation qui existe entre trois dérivées successives d'ordre quelconque de la fonction

$$(x^2 - 1)^n;$$

montrer qu'il ne peut exister de relation entre deux dérivées successives; la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n - p$. Soit $f(x)$ une des dérivées de

$(x^2 - 1)^n$; $f'(x)$ et $f''(x)$ étant les dérivées première et seconde de $f(x)$, la relation qu'il s'agit de trouver aura la forme

$$Af(x) + Bf'(a) + Cf''(x) = 0;$$

chercher s'il existe d'autres fonctions entières du même degré vérifiant la même identité. *(L. Lévy.)*

119. — Soient Ox, Oy deux droites, P un plan perpendiculaire à Ox au point O. Dans le plan P, on mène une droite ON, et dans le plan NOy une droite OM telle que

$$\frac{\sin MON}{\sin NOy} = K;$$

trouver le lieu géométrique de la droite OM lorsque la droite ON tourne autour du point O dans le plan P.

(L. Lévy.)

120. — Discuter la surface représentée par l'équation

$$x^4 - y^4 + z^4 + 4xy^2z - 2x^2z^2 + 2a^2(y^2 + 2xz) \\ - 4a(x^2 + z^2)y - a^4 = 0.$$

(E. Catalan.)

ERRATUM

Dans la question 89, publiée au numéro de janvier, au lieu de : « le lieu décrit est une courbe du *dixième* degré », il faut dire : « est une courbe du *douzième* degré ». On peut ajouter qu'elle se décompose en deux courbes du *sixième* degré. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6032-4.

SUR UN MÉMOIRE (*) DE M. LANDRY

Par M. G. de Longchamps.

L'article que nous avons publié récemment (**) sur le problème de Pell, nous a procuré la communication d'un mémoire de M. Landry, mémoire que nous avons lu avec le plus grand intérêt, qui touche par un point au problème de Pell, et qui nous paraît renfermer plusieurs points dignes de fixer l'attention.

1. — Le point de départ du mémoire que nous voulons analyser est le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue, ce mot étant pris dans son sens général (***).

En posant

$$A = a^2 + r, \quad (r \leq 2a)$$

et en remarquant que

$$\sqrt{A} = a + \sqrt{A} - a,$$

on a

$$\sqrt{A} = a + \frac{(\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a)}{\sqrt{A} + a};$$

ou, enfin,

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}.$$

De cette égalité, on déduit

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + .}}}$$

(*) *Cinquième mémoire sur la théorie des nombres*, par M. *F. Landry*, licencié ès sciences mathématiques. Librairie Hachette, juillet 1856.

(**) *Journal de Mathématiques élémentaires* (1884, p. 15).

(***) V. *Traité d'algèbre*, par *H. Laurent*, p. 341.

Ce développement sert de base au mémoire qui nous occupe.

2. — On sait (*) que si une fraction continue f est de la forme

$$f = a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdot}}}$$

les réduites sont

$$U_0 = \frac{a_0}{1}, \quad U_1 = \frac{a_0 b_1 + a_1}{b_1}, \quad U_2 = \frac{b_2(a_0 b_1 + a_1) + a_2 a_0}{b_2 b_1 + a_2}, \ldots$$

Posant

$$X_n = b_n X_{n-1} + a_n X_{n-2},$$
$$Y_n = b_n Y_{n-1} + a_n Y_{n-2},$$

on a

$$U_n = \frac{X_n}{Y_n}.$$

On sait aussi qu'en faisant

$$Z_n = X_n Y_{n-1} - X_{n-1} Y_n,$$

on a

$$Z_n = - a_n Z_{n-1}.$$

De ces relations on peut déduire le théorème suivant, donné par M. Landry, et qui l'a conduit à une solution de l'équation indéterminée

$$x^2 - Ay^2 = \pm r^m.$$

3. Théorème. — *Si l'on considère deux réduites consécutives* $\frac{m}{m'}$, $\frac{p}{p'}$ *de la fraction continue* f, *on a*

$$p^2 - Ap'^2 = - r(m^2 - Am'^2).$$

Nous nous proposons d'établir ce théorème remarquable par une voie différente de celles que M. Landry a employées; mais cette démonstration repose sur une relation importante entre *deux réduites consécutives*, et que nous établirons d'abord.

(*) V. *Alg.* Laurent (*Loc. cit.*).

4. Théorème. — *Dans la fraction continue* f, *deux réduites consécutives* U_n, U_{n-1} *vérifient constamment la relation*

$$U_n = \frac{A + aU_{n-1}}{a + U_{n-1}}. \qquad (1)$$

On a, en effet, par la définition de U_n,

$$U_n = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ddots + 2a + \cfrac{r}{2a}}};$$

la lettre r, qui entre dans cette expression, y figurant n fois.

Cette égalité donne

$$U_n - a = \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \ddots + 2a + \cfrac{r}{2a}}},$$

ou

$$\frac{r}{U_n - a} = 2a + \cfrac{r}{2a + \ddots + 2a + \cfrac{r}{2a}}.$$

Retranchant a aux deux membres, nous aurons

$$\frac{r}{U_n - a} - a = a + \cfrac{r}{2a + \ddots + 2a + \cfrac{}{2a}}.$$

Dans le second membre, la lettre r figure $(n - 1)$ fois.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{r}{U_n - a} - a = U_{n-1}.$$

Cette égalité, en tenant compte de la formule

$$A = a^2 + r,$$

est la relation (1), que nous voulions établir.

5. Récurrence des termes de deux réduites consécutives. — La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{AY_{n-1} + aX_{n-1}}{aY_{n-1} + X_{n-1}}.$$

Cette formule conduit à soupçonner la loi qui lie les fonctions X_n, Y_n, aux termes X_{n-1}, Y_{n-1}, de la réduite précédente. Nous allons montrer que l'on a constamment

$$X_n = AY_{n-1} + aX_{n-1},$$
$$Y_n = aY_{n-1} + X_{n-1}.$$

Nous supposons pourtant que les réduites sont calculées par le procédé arithmétique ordinaire, celui qui est naturellement indiqué par les formes :

$$\frac{a}{1}, \quad a + \frac{r}{2a}, \quad a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a}}, \ldots$$

et, sous cette réserve formelle, que les fractions obtenues :

$$\frac{X_0}{Y_0}, \quad \frac{X_1}{Y_1}, \quad \frac{X_2}{Y_2}, \quad \ldots$$

n'ont pas été simplifiées, s'il arrive qu'elles soient susceptibles de l'être. C'est dans ces conditions que les fonctions X_n, Y_n sont bien déterminées; X_n désignant le numérateur, et Y_n le dénominateur, de la réduite U_n, réduite calculée comme nous venons de le dire.

Les premières réduites :

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{2a^2 + r}{2a}, \quad \frac{4a^3 + 3ar}{4a^2 + r}, \ldots$$

donnent, d'après la définition précédente,

$$X_0 = a, \quad X_1 = 2a^2 + r, \quad X_2 = 4a^3 + 3ar, \ldots$$
$$Y_0 = 1, \quad Y_1 = 2a, \quad Y_2 = 4a^2 + r, \ldots$$

et l'on vérifie, immédiatement, que l'on a

$$X_1 = AY_0 + aX_0, \quad \text{ou } 2a_2 + r = (a^2 + r)\,1 + a^2;$$
$$Y_1 = aY_0 + X_0, \quad \text{ou } 2a \qquad = a.1 + a.$$

De même,

$$X_2 = AY_1 + aX_1, \text{ ou } 4a^3 + 3ar = 2a\,(a^2 + r) + a\,(2a^2 + r)$$
$$Y_2 = aY_1 + X_1, \text{ ou } 4a^2 + r = 2a^2 + (2a^2 + r).$$

Ainsi la loi se vérifie pour les premières fonctions X, Y; il est aisé de voir que cette loi est générale et qu'elle s'applique aux fonctions X_n, Y_n quel que soit n.

Supposons, en effet, que nous ayons

$$X_{n-1} = AY_{n-2} + aX_{n-2}, \qquad (1)$$

et,

$$Y_{n-1} = aY_{n-2} + X_{n-2}; \qquad (2)$$

et proposons-nous de montrer que cette loi subsiste pour les fonctions X_n, Y_n.

Nous avons d'abord, par les formules connues, rappelées plus haut,

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 2aX_{n-1} + rX_{n-2}, \\ Y_n &= 2aY_{n-1} + rY_{n-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

D'autre part, les égalités (1) et (2) donnent:

$$X_{n-1} - aY_{n-1} = rY_{n-2},$$
$$aX_{n-1} - AY_{n-1} = -rX_{n-2}.$$

Substituons les valeurs de rY_{n-2}, rX_{n-2} dans les formules (A), et nous obtenons les résultats suivants:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= aX_{n-1} + AY_{n-1}, \\ Y_n &= aY_{n-1} + X_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

Les formules de récurrence que nous avions soupçonnées sont donc démontrées.

6. — Par exemple, dans l'un des cas numériques examinés par M. Landry, dans le mémoire cité, celui où l'on considère le développement de $\sqrt{31}$, on a

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 + \ldots}} \qquad \begin{pmatrix} A = 31 \\ a = 5 \\ r = 6 \end{pmatrix}$$

ainsi qu'il résulte de l'égalité

$$31 = 5^2 + 6.$$

Les réduites sont, dans cet exemple,

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{5}{1}, \quad \frac{X_1}{Y_1} = \frac{56}{10}, \quad \frac{X_2}{Y_2} = \frac{590}{106}, \quad \frac{X_3}{Y_3} = \frac{6236}{1120}, \ldots$$

Chacune de ces réduites peut se calculer au moyen de la réduite précédente et l'on a bien, conformément à la loi que nous avons établie,

$$\begin{array}{ll} 56 = 5 \times 5 + 31 \times 1 & 10 = 5 \times 1 + 5 \\ 590 = 5 \times 56 + 31 \times 10 & 106 = 5 \times 10 + 56 \\ 11236 = 5 \times 590 + 31 \times 106 & 1120 = 5 \times 106 + 590 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le point sur lequel nous venons de nous arrêter a pour but de montrer la liaison très simple qui unit les éléments X_n, Y_n, aux éléments analogues et immédiatement précédents X_{n-1}, Y_{n-1}. Il est le seul qui nous soit personnel dans la présente note, laquelle, comme nous l'avons dit plus haut, a surtout pour but de montrer comment M. Landry est arrivé à la résolution de l'équation de Pell et, aussi, à celle d'une équation plus générale. Mais ce point nous a paru avoir quelque intérêt parce qu'il est, ordinairement, très difficile de trouver une relation de récurrence simple entre les fonctions X_n, Y_n, et les fonctions voisines X_{n-1}, Y_{n-1}. Cette relation est plus puissante que la relation ordinaire entre X_n, Y_n; X_{n-1}, Y_{n-1}; X_{n-2}, Y_{n-2}; elle permet de reconnaître rapidement les propriétés des nombres récurrents X_n, Y_n.

(A suivre.)

CONSTRUCTION

DU CENTRE DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

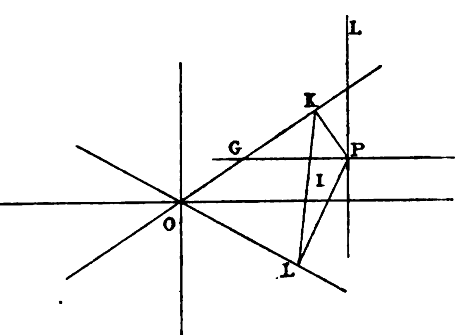
PASSANT PAR LES PIEDS DES NORMALES

MENÉES A UNE CONIQUE A CENTRE, PAR UN POINT DONNÉ

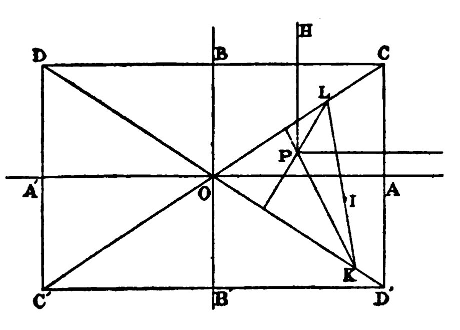
Par M. **Niewenglowski**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Supposons d'abord que la conique donnée (C) soit une hyperbole. On sait, d'une manière générale, que l'hyperbole équilatère (E) passant par les pieds des normales à une conique

issues d'un point P, ne change pas, quand on remplace la conique par une autre, homothétique à la première, et ayant même centre. On peut donc remplacer l'hyperbole donnée par le système de ses deux asymptotes; par conséquent, les pieds K, L des perpendiculaires abaissées du point P sur les asymptotes de l'hyperbole donnée sont deux points de l'hyperbole équilatère (E). Je dis que le centre cherché est au point I, milieu de KL. Il suffit de prouver que PK et PL sont deux cordes supplémentaires de l'hyperbole (E). Pour cela, remarquons que si l'on mène par le point P des droites PG, PH, parallèles aux axes de l'hyperbole (C), on forme un faisceau harmonique (P, GHKL) composé de ces deux parallèles et des perpendiculaires aux asymptotes, puisque les rayons de ce faisceau sont respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau formé par les axes et les asymptotes de l'hyperbole (C).



Cette construction est bien connue. La suivante, relative au cas de l'ellipse, l'est peut-être moins.



Supposons que la conique (C) soit une ellipse. Soient CC', DD' les diagonales du rectangle construit sur les deux axes AA', BB' de l'ellipse. Je mène par le point P la droite PK perpendiculaire à CC' et je prends son intersection avec *l'autre* diagonale DD'; de même L est l'intersection de CC' avec la perpendiculaire abaissée de P sur DD'.

Je dis que le milieu I de KL est encore le centre de l'hyperbole équilatère (E) relative à l'ellipse donnée. En effet, on voit d'abord, comme dans le cas précédent, que PK et PL sont deux cordes supplémentaires de l'hyperbole (E), car le faisceau (O, ABCD) étant harmonique, il en est de même du faisceau (P, GHKL) formé par les perpendiculaires PK, PL et par les parallèles aux axes : PG, PH. Il n'y a donc plus qu'à prouver que K et L sont des points de l'hyperbole (E). Or il y a une ellipse homothétique à la proposée, ayant même centre, et passant par le point K. Dans cette ellipse, les droites CC', DD' sont conjuguées, puisqu'elles donnent les directions des diamètres conjugués égaux; donc la tangente en K est parallèle à CC', et par suite K est le pied d'une normale à cette ellipse, menée par le point P. Or l'hyperbole (E) est à la même place que pour l'ellipse (C), donc (E) passe par K, et aussi par L pour la même raison. La proposition est donc établie. Ces résultats sont faciles à vérifier par le calcul.

SUR LE LIMAÇON DE PASCAL

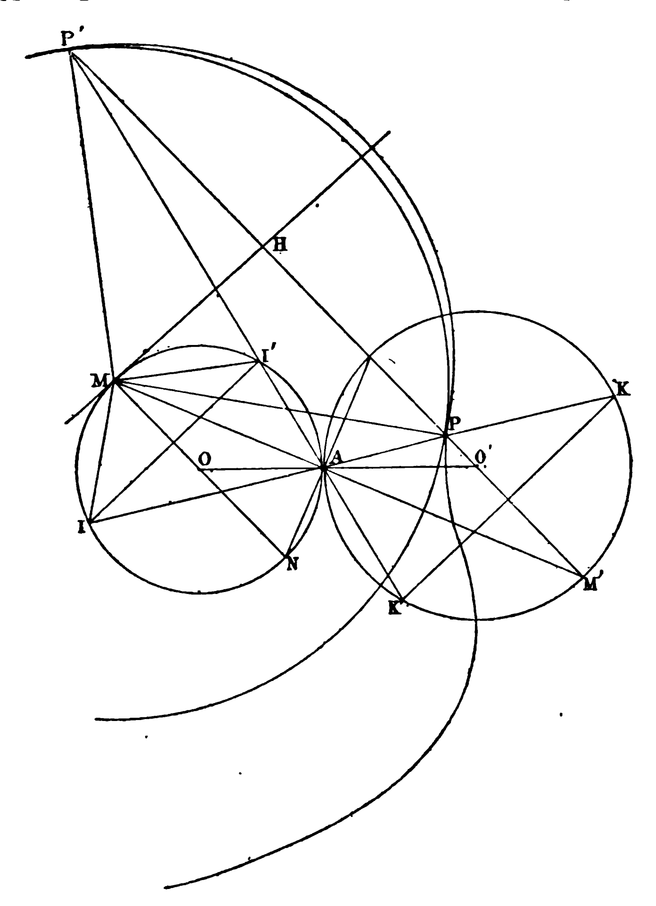
Par **M. Hadamard**, élève en Mathématiques spéciales, au Lycée Louis-le-Grand.

Le limaçon de Pascal est anallagmatique (c'est-à-dire que l'on peut trouver une transformation par rayons vecteurs réciproques dans laquelle il soit son propre homologue). — La propriété devient illusoire lorsque le limaçon se réduit à une épicycloïde.

Soit le limaçon défini par le cercle O, le point A de ce cercle et la longueur a. Par le point A faisons passer un cercle O' tangent au premier, et dont nous déterminerons ultérieurement le rayon. Imaginons qu'un cercle, ayant son centre en un point variable M du cercle O, se déplace de façon à couper toujours orthogonalement le cercle O'. Considérons l'enveloppe d'un tel cercle.

Pour cela soient deux positions M et M_1 de ce cercle.

Puisque le point O′ a même puissance par rapport aux cercles M et M_1, leur corde commune sera la perpendiculaire abaissée du point O′ sur la ligne qui joint leurs centres. Si alors on suppose que, le cercle M restant fixe, le cercle M_1 tend à se



confondre avec lui, on voit à la limite que les points de con tact du cercle M avec son enveloppe seront ses deux points P et P′ d'intersection avec la perpendiculaire abaissée du point O′ sur les tangentes menées par le point M au cercle O; de sorte que l'enveloppe en question sera le lieu des points P et P′.

Or ce lieu est une courbe anallagmatique; car l'on a constamment $O'P' \times O'P' = \overline{O'A}^2$; et nous allons établir que c'est un limaçon de Pascal.

Pour cela joignons AP qui coupe O en I et le cercle O' en K; A'P' qui coupe le cercle O en I' et le cercle O' en K'. Les points P et P' étant réciproques par rapport au cercle O', la droite KK' est perpendiculaire au diamètre OPP', et par suite II' est perpendiculaire à OM. Dès lors l'angle de MP et de MI est égal à l'angle des demi-droites symétriques de celles-là par rapport à OM, qui sont MI' et le prolongement de MP'. Donc les angles PMI, P'MI' sont supplémentaires.

Mais dans le cercle O, les angles MIP, MI'P' sont égaux ou supplémentaires. Or ils ne peuvent être supplémentaires, sans quoi la somme des angles des deux triangles serait supérieure à 4 droits. Ils sont donc égaux.

D'ailleurs, on a $MP = MP'$ et $MI = MI'$ et, par suite, la construction ordinaire d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés, et l'angle opposé à l'un d'eux montre que les angles IPM, I'P'M sont égaux ou supplémentaires.

Or, pour la même raison que plus haut, ils ne peuvent être supplémentaires; ils sont donc aussi égaux. Il en résulte l'égalité des triangles MIP, M'I'P' et par suite celle de leurs angles en M. Ces angles, étant à la fois égaux et supplémentaires, sont donc droits.

Dès lors, si N désigne le point diamétralement opposé au point M et que nous joignions AN, les triangles MIP, ANM sont semblables et donnent $IP = MN \cdot \dfrac{MP}{MA}$.

Or $MP = \sqrt{MA \cdot MM'}$, M' étant le point d'intersection de la droite MA avec le cercle O'. Donc

$$\frac{MP}{MA} = \sqrt{\frac{MM'}{MA}} = \sqrt{\frac{OO'}{OA}}.$$

D'où

$$IP = 2\sqrt{OA \cdot OO'} = \text{const.}$$

L'enveloppe du cercle M est donc un limaçon de Pascal. D'ailleurs, on peut disposer du rayon O'A de façon à ce que ce limaçon coïncide avec le limaçon donné; il suffira de

prendre OO′ troisième proportionnelle entre OO′ et $\frac{a}{2}$. Si donc on détermine le point O′ par cette construction, ce point sera le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques dans laquelle le limaçon se correspondra à lui-même.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL

Nous avons remarqué dans le *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et C. de Comberousse (5me édition, page 448, 2me partie) l'énoncé d'un théorème remarquable sur les normales aux coniques.

Nous croyons que cette proposition n'est pas très connue, et nous espérons que nos lecteurs nous sauront gré d'indiquer un moyen de l'établir. Le théorème s'énonce ainsi :

Si d'un sommet A d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales qu'on peut mener d'un point P (α, β) *à cette conique, les quatre points (tels que* Q*) où ces perpendiculaires rencontrent de nouveau la courbe appartiennent à un même cercle.*

Voici comment on pourrait établir ce théorème :

Soit PM une des quatre normales issues de P (*); si M est son point d'incidence et que φ désigne l'angle d'anomalie correspondant à ce point, de sorte que $a \cos \varphi$ et $b \sin \varphi$ soient respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M, l'équation qui fournit les valeurs de φ relatives aux pieds des quatre normales issues de P est, comme on sait :

$$a\alpha \sin \varphi - b\beta \cos \varphi = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\varphi = 2\,(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - 2\,(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2) \cos 2\varphi - 4ab\alpha\beta \sin 2\varphi$$

Or il est facile de voir que l'angle 2φ est l'anomalie du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

point Q; car AQ étant parallèle à la tangente à l'ellipse au point M, si l'on se reporte aux propriétés projectives du cercle décrit sur $2a$ comme diamètre, les arcs d'ellipse AM et AQ sont les projections de deux arcs de cercle dont l'un est la moitié de l'autre, et qui ont respectivement pour mesure les angles d'anomalie de M et de Q.

Si donc on pose, dans l'équation précédente,

$$x = a \cos 2\varphi, \quad y = b \sin 2\varphi,$$

elle deviendra

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{b^2} y^2 = 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - 2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} - 4a\alpha\beta y$$

et s'appliquera, par conséquent, aux coordonnées des quatre points Q. Ces points sont donc à la rencontre de l'ellipse proposée avec le lieu que représente l'équation précédente, si l'on y regarde x et y comme des coordonnées courantes.

Mais on a identiquement entre les coordonnées d'un point de l'ellipse la relation

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} - a^2 = 0.$$

Si donc on multiplie cette relation par $a^2 - b^2$, et qu'on en retranche la première, l'équation résultante s'appliquera encore aux coordonnées des points tels que Q et représentera, par conséquent, un lieu passant par ces points. Il vient ainsi

$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - a^2) - 2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} - 4a\alpha\beta y$$
$$+ 2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = 0,$$

équation qui représente bien un cercle.

Si l'on pose $\alpha' = a \dfrac{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}$, et $\beta' = b \dfrac{2ab\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}$,

cette équation prend la forme remarquable :

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1\right) = 0$$

d'où l'on déduit immédiatement un deuxième théorème. Observons, en effet, que α' et β' sont les coordonnées du point S où la perpendiculaire abaissée de A sur OP rencontre de nouveau la courbe ; pour le vérifier, il suffit de

combiner les deux équations

$$\beta x - \alpha y = 0 \text{ et } \alpha(x - a) + \beta y = 0,$$

en y supprimant les solutions $x = a$ et $y = 0$.

Or $\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0$ est l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point $S(\alpha'\beta')$; par conséquent :

Si on abaisse d'un sommet A *de l'ellipse une perpendiculaire sur le diamètre* OP, *perpendiculaire qui rencontre de nouveau la courbe en un point* S, *la tangente à la conique en* S *est la corde commune au cercle des points* Q *et à la circonférence* $x^2 + y^2 = a^2$.

Joachimsthal conclut de là une solution élégante du problème suivant :

Abaisser d'un point P *des normales sur une ellipse supposée tracée.*

Si l'on mène de A la perpendiculaire AS sur le diamètre OP, et qu'on détermine les intersections K et K′ de la tangente en S avec le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, il suffira ensuite de mener une circonférence passant en K et K′ et ayant son centre sur la droite

$$y = \frac{2a\alpha\beta}{a^2 - b^2},$$

parallèle au grand axe et facile à construire ; cette circonférence coupera la courbe aux quatre points désignés par la lettre Q, et les perpendiculaires abaissées du point P sur les quatre droites AQ seront les quatre normales cherchées.

Le même procédé de calcul s'applique sans modifications à l'hyperbole ; il suffit de déterminer les coordonnées d'un point de la courbe par les formules

$$x = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y = b \text{ tang } \varphi.$$

Le théorème de Joachimsthal était proposé comme question d'examen par Abel Transon, pendant qu'il était examinateur d'admission à l'École polytechnique ; c'est pour répondre à

cette question que j'indiquais et que j'indique encore à mes élèves la solution suivante :

Désignons par (α, β) les coordonnées relativement aux axes de l'ellipse du point S d'où partent les quatre normales ; puis transportons l'origine au sommet de droite ; l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2x}{a} = 0$$

et l'équation du faisceau des quatre projetantes sera

$$(\alpha x + \beta y)^2(b^2x^2 + a^2y^2) - c^4x^2y^2 = 0.$$

Le système de ces deux équations peut être remplacé par le suivant :

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2ab^2x = 0$$

$$c^4x^2y^2 + 2ab^2x\left[\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy - \frac{\beta^2}{a^2}\ (b^2x^2 + 2ab^2x)\right] = 0$$

Supprimons dans la dernière équation le facteur x^2, ce qui revient à supprimer, dans l'intersection, quatre fois le sommet de l'ellipse, les quatre points restants seront sur la conique :

$$c^4y^2 + 2ab^2\left[\alpha^2x + 2\alpha\beta y - \frac{b^2\beta^2}{a^2}\ (x + 2a)\right] = 0 \quad (u)$$

qui a les mêmes directions principales que l'ellipse : donc les quatre points d'intersection avec l'ellipse sont sur une même circonférence.

On peut même remarquer que cette conique est une parabole ; ce qui ramène à la méthode classique : intersection d'un cercle et d'une parabole.

E. V.

QUESTION 51

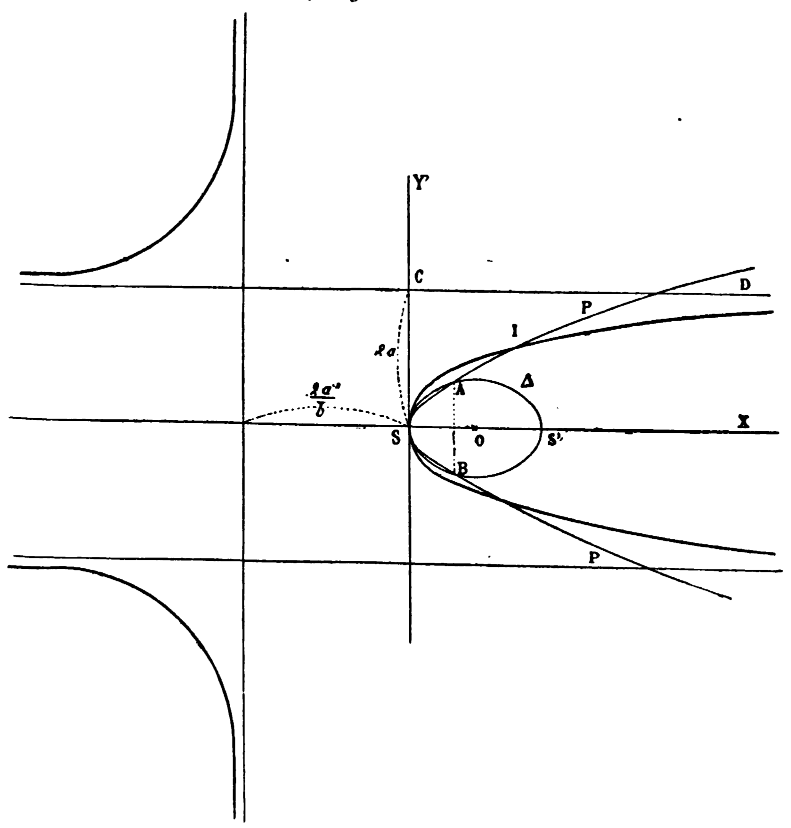
Solution par M. Clément, élève au Lycée de Rouen.

On considère une conique à centre Δ *; soit* S *l'un des sommets de cette courbe et* AB *une corde principale. On trace une parabole* P *passant par les points* A *et* B, *et ayant, elle aussi, le point* S *pour sommet. Soit* I *le point de contact de la parabole* P

avec une droite à la fois tangente à Δ *et à* P. *Lieu de ce point* I *quand la corde* AB *se meut parallèlement à elle-même.* (G. L.)

Considérons le sommet de gauche S de l'ellipse; prenons pour axe des x le grand axe de l'ellipse, et pour axe des y la tangente au sommet S. L'équation de l'ellipse est alors

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab^2x = 0.$$



L'équation de la parabole ayant le point S pour sommet et passant par les points A, B est de la forme

$$y^2 = 2px.$$

Soit $y = \alpha x + \frac{p}{2\alpha}$ l'équation d'une tangente à cette para-

bole. Exprimons que cette droite est tangente à l'ellipse Δ; en éliminant y entre l'équation de la tangente et celle de Δ, et en exprimant que l'équation obtenue a deux racines égales, on trouve la condition

$$b \times \frac{p^2}{\alpha^2} + 4a^2p - 4a^2b = 0.$$

Le point I se trouve sur le diamètre de la parabole conjuguée de la direction α, diamètre dont l'équation est

$$y = \frac{p}{\alpha}.$$

En éliminant α et p entre les trois dernières équations, on trouve pour l'équation du lieu du point I

$$bxy^2 + 2a^2y^2 - 4a^2bx = 0.$$

Construisons cette courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des x. On tire de là

$$x = \frac{2a^2y^2}{4a^2b - by^2} = \frac{2a^2}{\frac{4a^2b}{y^2} - b}.$$

Pour $y = 0$, on a $x = 0$, et l'axe des y est tangent à l'origine.

Lorsqu'on fait croître y, x augmente et reste positif tant que $y^2 > 4a^2$.

Pour $y = 2a$, on a $x = \infty$; soit CD la droite $y = 2a$; cette droite est asymptote.

Lorsque y croît de $2a$ à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à $-\frac{2a^2}{b}$.

La droite $x = -\frac{2a^2}{b}$ est asymptote. Ces valeurs négatives de x correspondent au cas où la droite AB se confond avec la tangente Sy et où la parabole est tout entière située du côté des x négatifs.

La symétrie par rapport à l'axe des x permet d'achever le tracé de la courbe. Si au lieu de considérer le sommet de gauche S de l'ellipse, on considérait le sommet de droite S′, la courbe obtenue serait symétrique de la précédente par rapport au centre O de l'ellipse.

NOTA — La même question a été résolue par MM. Rat, à Marseille; Coulom, au collège Chaptal, à Paris. Les auteurs de ces solutions ont essayé de trouver la modification que subit le lieu lorsque la conique donnée devient une hyperbole.

QUESTION 56

Solution par M. Corot, élève au Lycée de Troyes.

Trouver le lieu des centres des cercles passant par le point de rebroussement d'une cardioïde, et tangente à la courbe en un autre point. Par le second point d'intersection de deux des cercles précédents, on mène une droite quelconque qui rencontre les deux cercles en A et A'. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et A' se coupent sur la cardioïde.

L'équation de la cardioïde rapportée à son axe pris pour axe polaire et à son point de rebroussement O pris pour pôle est

$$\rho = 2a(1 - \cos\theta).$$

Un cercle passant par le point O et dont les coordonnées du centre sont r et α a pour équation

$$\rho = 2r\cos(\theta - \alpha).$$

Il sera tangent à la cardioïde si l'on a

$$\frac{2r\cos(\theta-\alpha)}{-2r\sin(\theta-\alpha)} = \frac{2a(1-\cos\theta)}{2a\sin\theta} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

ou

$$\operatorname{cotg}(\theta - \alpha) = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right);$$

d'où

$$\theta = \pi + 2\alpha.$$

Pour avoir l'équation du lieu cherché, il faut éliminer ρ et θ entre les deux premières équations et cette dernière; cela donne :

$$r\cos(\pi + \alpha) = a[1 - \cos(\pi + 2\alpha)] = a(1 + \cos 2\alpha)$$

ou

$$-r\cos\alpha = 2a\cos^2\alpha$$

ou

$$r = 2a \cos(\pi + \alpha).$$

Le lieu est donc un cercle de rayon a et dont le centre est sur OX'.

Prenons deux points $I(r_1,\alpha_1)$ $I'(r_2,\alpha_2)$ sur ce cercle, on a

$$r_1 = 2a \cos(\pi + \alpha_1), \quad r_2 = 2a \cos(\pi + \alpha_2).$$

Ces points I et I' sont les centres de deux cercles passant par O et ayant alors respectivement pour équation:

$$\rho = 4a \cos(\pi + \alpha_1) \cos(\theta - \alpha_1),$$
$$\rho = 4a \cos(\pi + \alpha_2) \cos(\theta - \alpha_2).$$

Si par leur second point d'intersection on mène une sécante qui les coupe en A et A', nous savons que l'angle AOA' est constant et égal à l'angle IOI', c'est-à-dire $\alpha_2 - \alpha_1$, en supposant $\alpha_2 > \alpha_1$.

Menons donc par O deux droites

$$\theta = K, \quad \theta = K + \alpha_2 - \alpha_1.$$

La première coupe le cercle I en un point A qui a pour coordonnées

$$\rho_1 = 4a \cos(\pi + \alpha_1) \cos(K - \alpha_1), \quad \theta = K.$$

La deuxième coupe le cercle I' en un point A' qui a pour coordonnées

$$\rho_2 = 4a \cos(\pi + \alpha_2) \cos(K - \alpha_1), \quad \theta = K + \alpha_2 - \alpha_1.$$

La tangente au point A a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\theta - K)}{4a\cos(\pi+\alpha_1)\cos(K-\alpha_1)} + \frac{\sin(K-\alpha_1)}{4a\cos(\pi+\alpha_1)\cos^2(K-\alpha_1)}\sin(\theta-K)$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\theta + \alpha_1 - 2K)}{4a\cos(\pi+\alpha_1)\cos^2(K-\alpha_1)}.$$

La tangente en A' a aussi pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos[\theta - (K + \alpha_2 - \alpha_1)]}{4a\cos(\pi+\alpha_2)\cos^2(K-\alpha_1)}$$
$$+ \frac{\sin(K-\alpha_1)}{4a\cos(\pi+\alpha_2)\cos^2(K-\alpha_1)} \sin[\theta - (K + \alpha_2 - \alpha_1)]$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos[2K - 2\alpha_1 + \alpha_2 - \theta]}{4a\cos(\pi+\alpha_2)\cos^2(K-\alpha_1)}.$$

La coordonnée θ du point de rencontre des tangentes sera donnée en égalant les deux membres de leurs équa-

tions, c'est-à-dire en posant

$$\frac{\cos(\theta + \alpha_1 - 2K)}{\cos(\pi + \alpha_1)} = \frac{\cos(2K - 2\alpha_1 + \alpha_2 - \theta)}{\cos(\pi + \alpha_2)}$$

ou

$$\cos(\theta + \alpha_1 + \alpha_2 - 2K + \pi) + \cos(\theta + \alpha_1 - \alpha_2 - 2K - \pi)$$
$$= \cos(\theta + \alpha_1 - \alpha_2 - 2K - \pi) + \cos(2K - 3\alpha_1 + \alpha_2 - \theta - \pi)$$

ou

$$\theta = 2(K - \alpha_1) - \pi,$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\pi + \alpha_2)}{4a\cos(\pi + \alpha_2)\cos^2(K - \alpha_1)}$$

ou

$$\rho = 4a\cos^2(K - \alpha_1).$$

Portant ces valeurs de θ et de ρ dans l'équation de la cardioïde, on a l'identité

$$4a\cos^2(K - \alpha_1) = 4a\cos^2(K - \alpha_1),$$

ce qui prouve que les tangentes se coupent sur la cardioïde.

QUESTION 61

Solution par M. Clément, élève au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse rapportée à ses axes AA′, BB′. *D'un point* C *pris sur l'axe* Oy *avec* CA = CA′ *pour rayon, on décrit un cercle* Δ, A *et* A′ *désignant les extrémités du grand axe.*

1. — *Soit* M *un point mobile sur* Δ; *par ce point* M *on mène à l'ellipse des tangentes. La droite qui joint les points de contact rencontre* Δ *en deux points* P *et* Q, *et les tangentes en* P *et* Q *à* Δ *se rencontrent en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* M *parcourt la circonférence.*

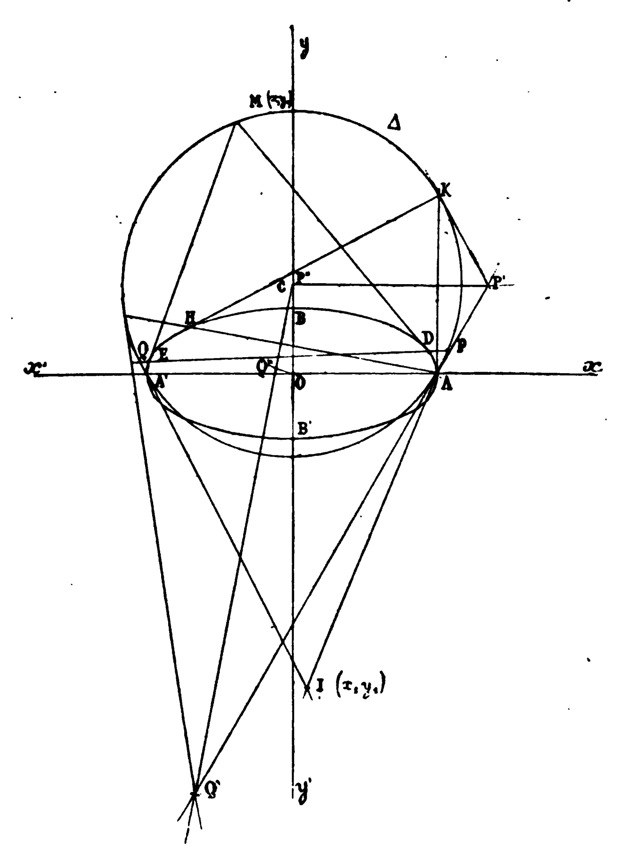
2. — *Ce lieu est une conique* U, *dont on demande de déterminer le genre d'après la position du point* C *sur* Oy.

3. — *Construire cette conique en supposant* $a^2 = 3b^2$, *et en admettant que* C *coïncide avec* B.

4. — *La tangente en* A *au cercle rencontre* U *en deux points* P′ *et* Q′. *Trouver le lieu de* P′ *et celui de* Q′ *quand* C *décrit* Oy.

5. — *De l'origine on abaisse une perpendiculaire* OP″ *sur* CP′, *et une autre* OQ″ *sur* CQ′. *Trouver le lieu de* P″ *et celui de* Q″.

(G. L.)



1. — Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

Posons $OC = d$; alors l'équation du cercle Δ est

$$x^2 + y^2 - 2dy - a^2 = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M de la circon-

férence, et x_1, y_1 les coordonnées du point I. On a la relation

$$x_0^2 + y_0^2 - 2dy_0 - a^2 = 0. \qquad (1)$$

La polaire DE du point M par rapport à l'ellipse a pour équation

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0.$$

La polaire PQ du point I par rapport au cercle a pour équation

$$x_1x + (y_1 - d)y - dy_1 - a^2 = 0.$$

Exprimons que ces deux polaires coïncident:

$$\frac{b^2x_0}{x_1} = \frac{a^2y_0}{y_1 - d} = \frac{a^2b^2}{dy_1 + a^2}.$$

Éliminons x_0, y_0 entre ces deux relations et la relation (1), nous aurons le lieu du point I:

$$\frac{a^4x_1^2}{(dy_1 + a^2)^2} + \frac{b^4(y_1 - d)^2}{(dy_1 + a^2)^2} - \frac{2b^2d(y_1 - d)}{dy_1 + a^2} - a^2 = 0$$

ou, en chassant les dénominateurs et ôtant les indices,

$$a^4x^2 + b^4(y - d)^2 - 2b^2d(y - d)(dy + a^2) - a^2(dy + a^2)^2 = 0$$

Cette équation développée devient

$$\left.\begin{matrix} a^4x^2 + b^4 \\ - 2b^2d^2 \\ - a^2d^2 \\ \end{matrix}\right| y^2 \left.\begin{matrix} - 2b^4d \\ + 2b^2d^3 \\ - 2a^2b^2d \\ - 2a^4d \end{matrix}\right| y \left.\begin{matrix} + b^4d^2 \\ + 2a^2b^2d^2 \\ - a^6 \\ \end{matrix}\right| = 0$$

équation d'une conique.

2. — Considérons la quantité $B^2 - AC$; ici B est nul et A est positif;

Donc si

$$b^4 - 2b^2d^2 - a^2d^2 > 0,$$

c'est-à-dire si

$$d^2 < \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

la conique sera une ellipse.

Si

$$d^2 > \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

le lieu du point I sera une hyperbole; et enfin si

$$d^2 = \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

le lieu sera une parabole (*).

3. — On suppose $a^2 = 3b^2$, $d = b$, et il s'agit de construire la courbe. On a dans ce cas

$$d^2 > \frac{b^4}{a^2 + 2b^2},$$

c'est-à-dire que la courbe est une hyperbole.

Son équation est

$$9b^4x^2 - 4b^4y^2 + 24b^5y - 20b^6 = 0$$

ou

$$9x^2 - 4y^2 - 24by - 20b^2 = 0.$$

Oy est l'axe transverse, et les points situés sur cet axe, c'est-à-dire les sommets, sont donnés par l'équation

$$y^2 + 6by + 5b^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$y = \left| \begin{array}{l} -5b \\ -b. \end{array} \right.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = 3b.$$

Les directions asymptotiques α sont données par l'équation

$$9 - 4\alpha^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \pm \frac{3}{2}.$$

Par conséquent, comme on a les coordonnées du centre, les équations des asymptotes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} y + \dfrac{b}{3} = \dfrac{3}{2}x \\ y + \dfrac{b}{3} = -\dfrac{3}{2}x. \end{array} \right.$$

On a les sommets, les asymptotes ; on peut donc construire les foyers et par suite la courbe.

(*) Il fallait indiquer, au moyen d'une construction géométrique, la position du point qui est situé sur l'axe des y et qui correspond à la parabole

G. L.

4. — *Lieu du point* P'. — Supposons que le point mobile M vienne coïncider avec le point A; la polaire du point A par rapport à l'ellipse est la perpendiculaire AK à l'axe des x; le pôle de cette droite AK par rapport au cercle, c'est le point P'. On voit que le point P' est à l'intersection de la tangente en A au cercle et de la parallèle à Ox menée par le point C, c'est-à-dire à l'intersection des droites

$$ax - dy - a^2 = 0,$$
$$y = d.$$

En éliminant d, on a

$$y^2 = ax - a^2,$$

équation d'une parabole ayant pour axe Ox et pour sommet le point A.

Lieu du point Q'. — Considérons la polaire AH du point K par rapport à l'ellipse. Le point Q' est le pôle de cette droite par rapport au cercle; il est donc situé sur la tangente en A au cercle et sur la perpendiculaire à AH menée par le point C. Les coordonnées du point K sont $x = a$, $y = 2d$; le coefficient angulaire de AH est donc

$$-\frac{b^2a}{2a^2d} = -\frac{b^2}{2ad}.$$

L'équation de CQ' est

$$y - d = \frac{2ad}{b^2}x$$

et l'équation de AP' : $ax - dy - a^2 = 0$.

En éliminant d entre ces deux équations, on a

$$ax - \frac{b^2y^2}{b^2 + 2ax} - a^2 = 0,$$

$$2a^2x^2 - b^2y^2 - \left.\begin{matrix} 2a^3 \\ + ab^2 \end{matrix}\right| x - a^2b^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu du point Q'. Ce lieu est une hyperbole ayant Ox pour axe transverse et dont les coordonnées du centre sont

$$\left| \begin{array}{l} y = 0 \\ x = \dfrac{2a^2 - b^2}{4a}. \end{array} \right.$$

5. — *Lieu du point* P''. — Ce lieu est évidemment l'axe des y, puisque CP' est perpendiculaire sur Oy.

Lieu du point Q″. — L'équation de la perpendiculaire OQ″ abaissée du point O sur CQ′ est

$$y = \frac{b^2}{2ad}x.$$

En éliminant d entre les équations de CQ′ et de OQ″, on a l'équation du lieu de Q″

$$y + \frac{b^2x}{2ay} + \frac{x^2}{y} = 0,$$

$$2ax^2 + 2ay^2 + b^2x = 0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine. Son centre a pour coordonnées

$$y = 0, \quad x = \frac{b^2}{4a}.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Laillard, au collège Chaptal, à Paris ; Giat, à Moulins ; Collin, à Dijon.

QUESTION PROPOSÉE

121. — Les cordes d'une ellipse des extrémités desquelles partent deux normales se coupant sur la développée sont normales à une ellipse homofocale de la première.

(*L. Lévy.*)

ERRATUM

Page 56, 2e ligne, remplacer le dernier terme e de la deuxième parenthèse par

$$e^{r\pi + \frac{\omega}{2}}.$$

Même page, lignes 6 à 12, remplacer (4) par (5), (5) par (6) et (6) par (7).

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9570-4.

SUR UN MÉMOIRE DE M. LANDRY

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite et fin*, voir page 73.)

7. Démonstration du théorème de M. Landry. — Les formules (G) donnent la démonstration immédiate du théorème que nous avons énoncé plus haut (§ 3). M. Landry a donné, dans son mémoire, deux démonstrations très simples de l'égalité :

$$p^2 - Ap'^2 = -r(m^2 - Am'^2),$$

que vérifient les quatre termes m, m'; p, p'; de deux réduites consécutives : $\frac{p}{p'}$, $\frac{m}{m'}$. Voici comment on peut encore établir cette proposition.

Les relations (G) étant écrites sous la forme

$$m = ap + Ap',$$
$$m' = ap' + p;$$

donnent

$$m^2 - Am'^2 = (ap + Ap')^2 - A\ (ap' + p)^2,$$

ou

$$m^2 - Am'^2 = -\ (A - a^2)\ (p^2 - Ap'^2),$$

ou, enfin,

$$m^2 - Am'^2 = -\ r\ (p^2 - Ap'^2).$$

En revenant à la notation ordinaire, on a

$$X_n^2 - AY_n^2 = -\ r\ (X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2)$$

Tel est, dit M. Landry, le principe qui nous a frappé. Nous pensons avec lui que cette récurrence entre les fonctions X_n, Y_n, d'une part, et les fonctions X_{n-1}, Y_{n-1}, d'autre part, est remarquable, et la preuve de l'attention que nous semble mériter la formule précédente découle, en partie, de l'application très heureuse que l'auteur en a faite à l'analyse indéterminée.

8. Application du théorème de M. Landry à l'analyse indéterminée. — Nous ne pouvons développer ici, quelque intérêt que nous attachions à cette étude, tous

les points que soulève ce mémoire, dont le tort principal a été, sans doute, de n'avoir pas été connu à son heure. Nous indiquerons pourtant, en terminant cette note, l'usage que M. Landry a fait de son théorème, pour la résolution des équations indéterminées de la forme

$$x^2 - Ay^2 = \pm r^m.$$

C'est par cette application que le travail de M. Landry se rattache à l'équation de Pell, ou aux équations de même espèce, et qu'il mérite de prendre rang à côté des mémoires que nous avons cités dans notre article, rappelé plus haut.

Il résulte du théorème de M. Landry que si l'on développe $\sqrt{A}$ en fraction continue, par la formule qu'il a indiquée dans son mémoire, on a

$$X_n^2 - AY_n^2 = -r(X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2),$$
$$X_{n-1}^2 - AY_{n-1}^2 = -r(X_{n-2} - AY_{n-2}^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_2^2 - AY_2^2 = -r(X_1^2 - AY_1^2),$$
$$X_1^2 - AY_1^2 = -r;$$

et, par suite,

$$X_n^2 - AY_n^2 = (-1)^n r^n.$$

De cette formule résulte, d'une façon évidente, l'application signalée par M. Landry. Pour citer ses propres exemples, le tableau suivant montre l'usage qu'on en peut faire.

9. — Premier Exemple.

$$x^2 - 19y^2 = 3^4.$$

On a

$$19 = 4^2 + 3,$$

par conséquent,

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{3}{8 + \cfrac{3}{8 + \cdots}}$$

Réduites:

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{35}{8}, \quad \frac{292}{67}, \quad \frac{2441}{560}.$$

$$x = 2441, \quad y = 560,$$

représentent une solution de l'équation proposée.

On peut vérifier que l'on a, en effet,

$$(2441)^2 - 19\,(560)^2 = 3^4,$$

ou,

$$5\,958\,481 - 5\,958\,400 = 81.$$

Deuxième Exemple.

$$x^2 - 31y^2 = -6^2.$$

On a

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{6}{10 + \cfrac{6}{10 +}}$$

Réduites :

$$\frac{5}{1},\quad \frac{56}{10},\quad \frac{590}{106}.$$

$$x = 590,\quad y = 106,$$

constituent une solution de l'équation.

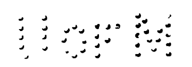
10. — Il y a dans le mémoire (*) de M. Landry plusieurs autres points très intéressants, tels que les rapprochements qu'il établit entre sa méthode et celles que Lagrange et Gauss ont indiquées pour résoudre les équations indéterminées, de l'espèce précédente. Mais nous regrettons de ne pouvoir, ici, insister davantage sur ces diverses parties.

Nous signalerons pourtant, en terminant cette notice, l'application faite par M. Landry, de la formule

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a +}}.$$

à l'extraction des racines carrées.

(*) Si cette note intéressait quelque ami de l'arithmétique, et s'il désirait connaître plus complètement le mémoire en question, nous croyons qu'il peut le demander à l'auteur (77, rue Denfert-Rochereau), (qui le lui enverra gracieusement.



Prenons l'exemple déjà cité

$$A = 31, \quad a = 5, \quad r = 6.$$

Si l'on fait abstraction de la partie entière, on peut former le tableau suivant :

Réduites :

$$\frac{6}{10} \quad \frac{60}{106} \quad \frac{636}{1120} \quad \frac{6720}{11836} \quad \frac{71016}{125080} \quad \frac{750480}{1321816} \ldots;$$

Valeurs décimales :

$$0,6; \quad 0,566\ldots; \quad 0,56785\ldots; \quad 0,567759\ldots;$$
$$0,5677646\ldots; \quad 0,567764348\ldots;$$

Mais posons maintenant

$$A = 31, \quad a = 5,5, \quad r = 0,75.$$

Nous avons alors:

$$\sqrt{31} = 5,5 + \cfrac{0,75}{11 + \cfrac{0,75}{11 + \ldots}}$$

Les réduites, abstraction faite de 5,5 sont :

$$\frac{75}{1100}; \quad \frac{825}{12175}; \quad \frac{913125}{13475000}.$$

Si on les convertit en décimales, on obtient :

$$0,068\ldots; \quad 0,067761\ldots; \quad 0,06776437\ldots;$$

et l'on a pour $\sqrt{31}$ les valeurs approchées :

$$5,568, \quad 5,567761, \quad 5,56776437.$$

Prenons maintenant les valeurs suivantes :

$$A = 31, \quad a = 5,56, \quad r = 0,0864.$$

Nous avons

$$\sqrt{31} = 5,56 + \cfrac{0,0864}{11,12 + \cfrac{0,0864}{11,12 + \ldots}}$$

Les deux premières réduites sont :

$$\frac{864}{111200}, \quad \frac{960768}{123740800}.$$

Ces réduites augmentées de 5,56 donnent, respectivement,



5,567 769... ; (1) 5,567 764 367... (2)

Ainsi, en prenant pour point de départ deux chiffres décimaux exacts, le calcul d'une seule réduite a donné la valeur (1), dans laquelle, comme on peut le vérifier, il y a cinq chiffres décimaux exacts. Avec deux réduites on a la valeur (2) dans laquelle il y a huit chiffres exacts; la valeur de $\sqrt{31}$ étant comprise entre

5,567 764 363 5..., et 5,567 764 368 5...

Si nous ne nous trompons, cette méthode permet de calculer rapidement des valeurs approchées des irrationnelles du second degré.

ÉLIMINATION PAR LA MÉTHODE DE BEZOUT

PERFECTIONNÉE PAR CAUCHY

Solution par M. Amigues, professeur au lycée de Marseille.

Dans cette méthode, la démonstration du théorème réciproque offre quelque difficulté. Voici comment, depuis quelques années, j'expose cette question au lycée de Marseille.

1. — Soient $f(x) = 0$, et $\varphi(x) = 0$, deux équations algébriques et entières de degrés m et p.

On isole dans le premier membre de chacune tous les termes divisibles par x, puis on divise membre à membre, en supprimant le facteur x dans les deux termes du premier membre. C'est le facteur. x qu'il faut seul supprimer, lors même que l'on aurait haut et bas en facteur une puissance de x supérieure.

On isole ensuite dans le premier membre de chacune des équations données tous les termes divisibles par x^2, puis on divise membre à membre, en supprimant le facteur x^2 dans les deux termes du premier membre, mais en se gardant bien de supprimer une puissance supérieure de x, si elle était en facteur.

On continue de même. Si l'on a $p = m$, on obtient ainsi m équations de degré $(m - 1)$. Si l'on a $p < m$, on peut

compléter le polynôme $\varphi(x)$ par des coefficients nuls de manière à le rendre de degré m, et on obtient encore m équations de degré $(m - 1)$.

C'est de cette façon que Cauchy obtient m équations de degré $m - 1$.

Bezout les obtenait d'une façon un peu moins simple.

Remarquons enfin que, dans le cas où $p < m$, il est bon de substituer aux $(m - p)$ dernières équations de Cauchy des équations plus avantageuses. On ne complète pas le polynôme $\varphi(x)$ par des coefficients nuls. Alors le calcul de Cauchy donne p équations. Seulement, et à la place des $(m - p)$ autres, on prend les $(m - p)$ équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 \\ x\varphi(x) &= 0 \\ x^2\varphi(x) &= 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x^{m-p-1}\varphi(x) &= 0 \end{aligned}$$

qui sont au plus de degré $(m - 1)$.

Nous obtenons ainsi m équations qui sont au plus de degré $(m - 1)$. Nous les appellerons les équations A.

Si dans les équations A on regarde x, $x^2 \ldots x^{m-1}$ comme autant d'inconnues distinctes, on a un système de m équations du premier degré à $(m - 1)$ inconnues et non homogènes. Nous appellerons ce système le système B.

2. — Cela posé, il est clair que si $x = \mu$ est une racine commune aux deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, cette même valeur est aussi racine de chacune des équations A, puisque chacune de ces dernières est une conséquence des équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. Mais alors on peut dire que

$$x = \mu, \quad x^2 = \mu^2, \quad x^3 = \mu^3 \ \ldots \ x^{m-1} = \mu^{m-1}$$

est une solution du système linéaire B ; et dès lors, ce système admettant une solution, il est nécessaire que son déterminant Δ soit nul.

En résumé, si les deux équations proposées ont une racine commune, il faut que l'on ait $\Delta = 0$.

Mais les raisonnements qui précèdent ne s'appliquent qu'à une racine commune finie. Je dis que le théorème est encore vrai pour une racine commune infinie. En effet, si les deux équations admettent une racine commune infinie, le coefficient de x^m dans $f(x)$ et celui de x^p dans $\varphi(x)$ sont nuls. Or les éléments de la première colonne du déterminant Δ sont tous nuls dans ce cas-là, comme il est facile de le vérifier.

Remarquons une propriété du déterminant Δ, qui nous sera utile pour la démonstration de la réciproque. Je dis que le déterminant Δ est *au plus* de degré p par rapport aux coefficients de $f(x)$ et *au plus* de degré m par rapport aux coefficients de $\varphi(x)$. Car les éléments des p premières lignes sont linéaires par rapport aux coefficients de f, et linéaires par rapport aux coefficients de φ, et ceux des $m - p$ dernières ne contiennent pas les coefficients de f et sont linéaires par rapport aux coefficients de φ.

3. — Réciproquement, si l'on a $\Delta = 0$, les équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune finie ou infinie.

Si les deux équations ont des racines infinies, le théorème est démontré. Supposons donc que l'une d'elles au moins n'ait pas de racine infinie, et soit $\varphi(x) = 0$ celle-là. Désignons ses p racines, qui sont toutes finies, par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \; \ldots \; \alpha_p.$$

La quantité $f(\alpha_1)$ est finie. Désignons-la par β_1. On a dès lors

$$f(\alpha_1) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(\alpha_1) = 0,$$

ce qui prouve que les deux équations

$$f(x) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

ont une racine commune $x = \alpha_1$. Donc il *est nécessaire* que le déterminant analogue à Δ et relatif à ces équations soit nul. Appelons ce déterminant Δ'. On a donc

$$\Delta' = 0 ;$$

Δ' est un polynôme de degré *au plus égal* à p par rapport aux coefficients de l'équation

$$f(x) - \beta_1 = 0$$

et par suite de degré *au plus égal* à p par rapport à β_1. La condition

$$\Delta' = 0$$

peut donc s'écrire

$$A + B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0$$

β_1 entrant dans le premier membre au plus avec le degré p.

Je dis que $A = \Delta$.

En effet, comme les équations

$$f(x) = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

se déduisent des équations

$$f(x) - \beta_1 = 0$$
$$\varphi(x) = 0$$

en faisant dans ces dernières $\beta_1 = 0$; de même Δ doit se déduire de Δ' en faisant dans Δ', $\beta_1 = 0$. On a donc bien

$$A = \Delta.$$

La condition ci-dessus peut alors s'écrire

$$\Delta + B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0$$

ou bien, en tenant compte de l'hypothèse $A = 0$,

$$B\beta_1 + C\beta_1^2 + \ldots = 0.$$

Ceci prouve que β_1, ou en d'autres termes $f(\alpha_1)$, est racine de l'équation

$$By + Cy^2 + \ldots = 0.$$

On prouverait de même que

$$f(\alpha_2),\quad f(\alpha_3)\ \ldots\ f(\alpha_p)$$

sont racines de cette équation, ce qui fait voir que cette équation atteint le degré p et qu'elle n'a pas d'autres racines que

$$f(\alpha_1),\quad f(\alpha_2)\ \ldots\ f(\alpha_p).$$

Or, elle a évidemment une racine nulle. Donc on a par exemple

$$f(\alpha_i) = 0$$

et par suite α_i est racine commune finie des équations

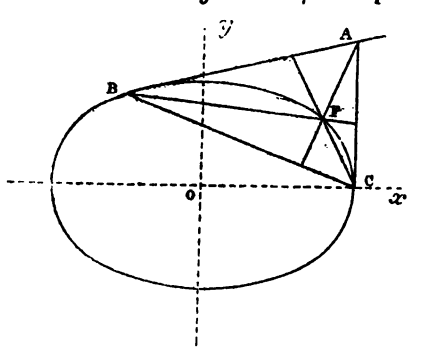
$$f(x) = 0$$
$$\varphi(x) = 0.$$

C. Q. F. D.

PROBLÈME SUR L'ELLIPSE

Solution par M. P. GIAT, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

Trouver le lieu du sommet A *d'un triangle* ABC *formé par deux tangentes* AB, AC *à une ellipse et la corde des contacts* BC, *et tel que ses trois hauteurs se coupent en* F *sur la courbe.*



Solution analytique.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse. Désignons par φ_1, φ_2 et φ les paramètres angulaires de B, C et F.

L'équation de la droite BC est

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

La tangente au point B a pour équation

$$\frac{x}{a}\cos\varphi_1+\frac{y}{b}\sin\varphi_1=1 \qquad (1)$$

et la tangente au point C

$$\frac{x}{a}\cos\varphi_2+\frac{y}{b}\sin\varphi_2=1. \qquad (2)$$

L'équation de la droite CF est

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi_2}{2}=\cos\frac{\varphi-\varphi_2}{2}.$$

Exprimons qu'elle est perpendiculaire sur AB, nous en déduisons

$$\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\frac{\varphi+\varphi_2}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\frac{\varphi+\varphi_2}{2}=0$$

ou en effectuant et ordonnant par rapport à $\frac{\varphi}{2}$:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_1\sin\frac{\varphi_2}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_1\cos\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

On aurait de même, en exprimant que la droite BF est perpendiculaire sur AC :

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}+\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}\cos\varphi_2\sin\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{b^2}\sin\varphi_2\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre, il nous vient:

$$\frac{\dfrac{1}{a^2}\cos\varphi_1\cos\dfrac{\varphi_2}{2}+\dfrac{1}{b^2}\sin\varphi_1\sin\dfrac{\varphi_2}{2}}{\dfrac{1}{a^2}\cos\varphi_2\cos\dfrac{\varphi_1}{2}+\dfrac{1}{b^2}\sin\varphi_2\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{a^2}\cos\varphi_1\sin\dfrac{\varphi_2}{2}-\dfrac{1}{b^2}\sin\varphi_1\cos\dfrac{\varphi_2}{2}}{\dfrac{1}{a^2}\cos\varphi_2\sin\dfrac{\varphi_1}{2}-\dfrac{1}{b^2}\sin\varphi_2\cos\dfrac{\varphi_1}{2}}$$

ou en simplifiant et en divisant par $\sin(\varphi_1-\varphi_2)$:

$$[b^4\cos\varphi_1\cos\varphi_2+a^4\sin\varphi_1\sin\varphi_2+a^2b^2$$
$$(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2))]=0.$$

La solution $\varphi_1=\varphi_2$ correspond au cas où la droite BC est normale à l'ellipse. On a alors pour le lieu du point A le lieu du pôle des normales, ce qui était du reste à prévoir. Ecartons ce cas particulier. Il nous reste

$$b^4\cos\varphi_1\cos\varphi_2+a^4\sin\varphi_1\sin\varphi_2+a^2b^2$$
$$(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2))=0. \qquad (3)$$

Nous aurons le lieu du point A en éliminant φ_1 et φ_2 entre les équations (1), (2) et (3).

Pour faire cette élimination, nous remarquerons que $\cos\varphi_1$ et $\cos\varphi_2$ sont racines de l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\cos\varphi-1\right)^2=\frac{y^2}{b^2}(1-\cos^2\varphi),$$

obtenue en remplaçant $\sin\varphi_1$ par sa valeur en fonction de $\cos\varphi_1$ dans l'équation (1).

On a donc

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 = \frac{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}.$$

On aurait de même

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}.$$

Remplaçons ces quantités par leurs valeurs dans l'équation (3), nous aurons le lieu demandé :

$$\frac{(a^2 + b^2)(b^2 - y^2)}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - x^2)}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}} + a^2b^2 = 0$$

ou en simplifiant

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Le lieu cherché est donc une ellipse ayant même centre que l'ellipse donnée, et ses axes dirigés dans des directions perpendiculaires, leurs longueurs étant

$$\frac{(a^2 + b^2)}{b} \text{ et } \frac{(a^2 + b^2)}{a}.$$

Solution géométrique.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Si dans un triangle* ABC *on joint le milieu* E *d'un côté* BC *au point d'intersection* F *des hauteurs et si du sommet opposé on abaisse une perpendiculaire sur cette droite jusqu'à son intersection* K *avec* BC, *le point* K *est le conjugué harmonique du pied* D *de la hauteur issue de* A *par rapport aux deux points* B *et* C.

En effet posons pour abréger $BD = m$, $DC = n$ et $AD = h$. Les deux triangles rectangles BDF, DAC sont semblables comme ayant un angle aigu égal, et nous donnent

$$\frac{DF}{m} = \frac{n}{h},$$

d'où

$$DF = \frac{mn}{h}.$$

Les deux triangles rectangles DFE, KAD sont semblables pour la même raison. Donc

$$\frac{KD}{h} = \frac{FD}{ED},$$

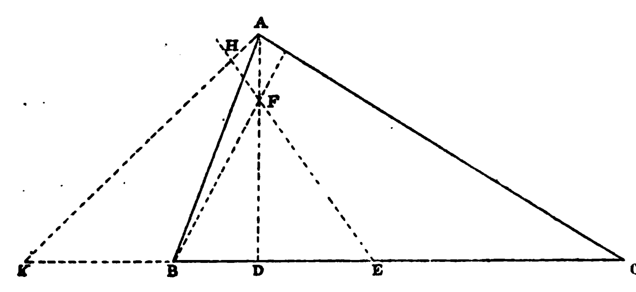


Fig. 1.

d'où

$$KD = \frac{mn}{ED}.$$

Mais

$$ED = \frac{n - m}{2},$$

donc

$$KD = \frac{2mn}{n - m},$$

$$KE = \frac{2mn}{n - m} + \frac{n - m}{2} = \frac{(n + m)^2}{2(n - m)}.$$

Par suite

$$ED \times EK = \frac{(m + n)^2}{4} = \overline{EB}^2.$$

C. Q. F. D.

Cela posé, revenons à la question. Joignons le centre O de l'ellipse au sommet A du triangle *(fig. 2)*; cette droite passe par le milieu E du côté BC. Joignons ce point E au point F d'intersection des hauteurs du triangle et du sommet A; abaissons une perpendiculaire sur cette droite. Soit K son intersection avec BC.

Les quatre points B, D, C, K formant une division harmonique et la droite BC étant la polaire du point A, la droite AK est la polaire du point D. Par conséquent la droite KF est tangente à l'ellipse, et comme cette droite passe par le point d'intersection de deux hauteurs du triangle EAK, elle est perpendiculaire sur OA. Le point R est donc sur le cercle circonscrit au triangle autopolaire ADK, puisque, par hypothèse, ce triangle est rectangle.

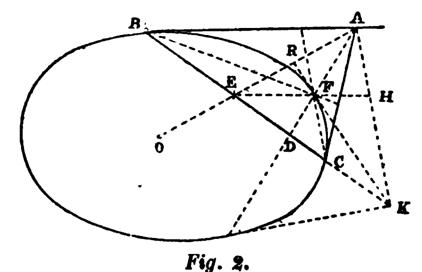


Fig. 2.

Or (théorème de M. Faure), ce cercle coupe orthogonalement le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

Par conséquent

$$OR \times OA = a^2 + b^2.$$

Le point A est donc situé sur la courbe polaire réciproque de l'ellipse donnée par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette ellipse.

NOTE D'ANALYSE RÉCURRENTE

Par M. **R. Levavasseur**, élève au Lycée Charlemagne (*).

I. — Nous nous proposons de calculer une dérivée d'ordre quelconque de la fonction $y = \text{arc sin } x$.

On sait que

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

J'en déduis

$$y^{(2)} = \frac{-\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

(*) Maintenant élève à l'École Normale supérieure.

puis

$$y^{(3)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}\,1 - x\dfrac{3(1-x^2)^2(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{(1-x^2)^3 . 1 + x . 3x . (1-x^2)^2}{(1-x^2)^3\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$= \frac{(1-x^2) . 1 + 3x . x}{\sqrt{(1+x^2)^5}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

puis encore

$$y^{(4)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^5} . 4x - (1+2x^2)\dfrac{5(1-x^2)^4(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^5}}}{(1-x^2)^5}$$

$$= \frac{(1-x^2)4x + 5x(1+2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^7}} = \frac{9x+6x^3}{\sqrt{(1-x^2)^7}}.$$

En général si N_p désigne le numérateur de la dérivée d'ordre $(p+1)$, N_{p-1} celui de la dérivée d'ordre p, on a la relation (1) $N_p = (2p-1)xN_{p-1} + (1-x^2)N'_{p-1}$.

En effet, soit

$$y^{(p)} = \frac{N_{(p-1)}}{\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}$$

$$y^{(p+1)} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}\,N'_{p-1} - N_{p-1}\dfrac{(2p-1)(1-x^2)^{2p-2}(-2x)}{2\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}}{(1-x^2)^{2p-1}}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{2p-1}N'_{p-1} + (2p-1)x(1-x^2)^{2p-2}N_{p-1}}{(1-x^2)^{2p-1}\sqrt{(1-x^2)^{2p-1}}}$$

ou bien

$$y^{(p+1)} = \frac{(2p-1)xN_{p-1} + (1-x^2)N'_{p-1}}{\sqrt{(1-x^2)^{2p+1}}},$$

ce qui démontre la relation (1).

On voit d'ailleurs que les dérivées d'ordre pair, $y^{(2)}, y \ldots y^{(2m)}$ ont pour numérateur une fonction entière de x ne renfermant que les puissances impaires de cette variable; et que les dérivées d'ordre impair, $y^{(1)}, y^{(3)}, y^{(5)}, \ldots\ y^{(2m+1)}$, ont pour numérateur une fonction entière de x ne renfermant

que les puissances paires de x. Ceci résulte de la relation (1). Supposons en effet que N_{p-1} ne renferme que les puissances impaires de x, pour fixer les idées : le produit xN_{p-1} ne renfermera que des puissances paires de x, N'_{p-1} n'est composée que de puissances paires de x, et comme elle est multipliée par $(1 - x^2)$, N_p ne renfermera que des puissances paires de x.

II. — Ainsi N_{2m} désignant le numérateur de la dérivée d'ordre $(2m+1)$, nous pouvons poser:

$$N_{2m} = \alpha_0^{(2m)} x^{2m} + \alpha_2^{(2m)} x^{2m-2} + \alpha_4^{(2m)} x^{2m-4}$$
$$+ \ldots + \alpha_{2k}^{(2m)} x^{2m-2k} + \ldots + \alpha_{2m-4}^{(2m)} x^4 + \alpha_{2m-2}^{(2m)} x^2 + \alpha_{2m}^{(2m)}.$$

La formule (1) nous donne la relation

$$N_{2m+1} = (4m+1)xN_{2m} + (1 - x^2)N'_{2m}.$$

Posons

$$N_{2m+1} = \alpha_0^{(2m+1)} x^{2m+1} + \alpha_2^{(2m+1)} x^{(2m-1)} + \alpha_4^{(2m+1)} x^{2m-3} + \ldots$$
$$+ \alpha_{2k+2}^{(2m+1)} x^{2m-2k-1} + \ldots + \alpha_{2m-2}^{(2m+1)} x^3 + \alpha_{2m}^{(2m+1)} x$$

et calculons les coefficients de N_{2m+1} en fonction des coefficients de N_{2m} , on a :

$$\begin{array}{rl|rl|}
N'^{2m} = & & + 2m\alpha_0^{(2m)} & x^{2m-1} \\
-x^2 N'_{2m} = & -2m\alpha_0^{(2m)} & -(2m-2)\alpha_2^{(2m)} & . \\
(4m+1)xN_{2m} = & (4m+1)\alpha_0^{(2m)} \quad x^{2m+1} & +(4m+1)\alpha_2^{(2m)} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
+(2m-2)\alpha_2^{(2m)} & x^{2m-3} \\
-(2m-4)\alpha_4^{(2m)} & \\
+(4m+1)\alpha_4^{(2m)} &
\end{array}
+ \ldots
\begin{array}{l|l}
+(2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} & x^{2m-2k-1} \\
-(2m-2k-2)\alpha_{2k+2}^{(2m)} & \\
+(4m+1)\alpha_{2k+2}^{(2m)} &
\end{array}
+ \ldots$$

$$\begin{array}{l|l}
+ 4\alpha_{2m-4}^{(2m)} & x^3 \\
- 2\alpha_{2m-2}^{(2m)} & \\
+ (4m+1)\alpha_{2-m2}^{(2m)} &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
+ 2\alpha_{2m-2}^{(2m)} & x \\
& \\
+ (4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)} &
\end{array}$$

Donc

$$N_{2m+1} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} x^{2m+1} + [2m\alpha_0^{(2m)} + (2m+3)\alpha_2^{(2m)}]x^{2m-1}$$
$$+ [(2m-2)\alpha_2^{(2m)} + (2m+5)\alpha_4^{(2m)}]x^{2m-3} + \ldots$$
$$+ [(2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} + (2m+2k+3)\alpha_{2k+2}^{(2m)}]x^{2m-2p-1} + \ldots$$
$$+ [4\alpha_{2m-4}^{(2m)} + (4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m)}]x^3 + [2\alpha_{2m-2}^{(2m)} + (4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)}]x.$$

De là je déduis le tableau suivant :

$$(A)\left\{\begin{array}{l}
\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} \\
\alpha_2^{(2m+1)} = 2m\alpha_0^{(2m)} + (2m+3)\alpha_2^{(2m)} \\
\alpha_4^{(2m+1)} = (2m-2)\alpha_2^{(2m)} + (2m+5)\alpha_4^{(2m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m-2k)\alpha_{2k}^{(2m)} + (2m+2k+3)\alpha_{2k+2}^{(2m)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2m-2}^{(2m+1)} = 4\alpha_{2m-4}^{(2m)} + (4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m)} \\
\alpha_{2m}^{(2m+1)} = 2\alpha_{2m-2} + (4m+1)\alpha_{2m}^{(2m)}.
\end{array}\right.$$

III. — Calculons de la même manière les coefficients de N^{2m} en fonction des coefficients de N_{2m-1}. D'après la formule (1) $N_{2m} = (4m-1)xN_{2m-1} + (1-x^2)N'_{2m-1}$. Nous pouvons poser

$$N_{2m-1} = \alpha_0^{(2m-1)}x^{m-1} + \alpha_2^{(2m-1)}x^{2m-3} + \ldots + \alpha_{2k}^{(2m-1)}x^{2m-2k-1} + \ldots + \alpha_{2m-4}^{(2m-1)}x^3 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}x.$$

On a

$$\begin{array}{l}
N'_{2m-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \left.\begin{array}{l} +(2m-1)\alpha_0^{(2m-1)} \\ -(2m-3)\alpha^{(2m-1)} \\ +(4m-1)\alpha_2^{(2m-1)}\end{array}\right| x^{2m-2} \\
-x^2N'_{2m-1} = -(2m-1)\alpha_0^{(2m1)} \Big| x^{2m} \\
(4m-1)xN_{2m-1} = +(4m-1)\alpha_0^{(2m-1)}
\end{array}$$

$$+\left.\begin{array}{l} (2m-\varkappa(\varepsilon_2^{(2m-1)} \\ -(2m-5)\alpha_4^{(2m-1)} \\ +(4m-1)\alpha_4^{(2m-1)}\end{array}\right| x^{2m-4} + \ldots + \left.\begin{array}{l} (2m-2k-1)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\ -(2m-2k-3)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\ +(4m-1)\alpha_{2k+2}^{(dm-1)}\end{array}\right| x^{2m-2k-2}$$

$$+ \ldots + \left.\begin{array}{l} 3\alpha_{2m-4}^{(2m-1)} \\ -\alpha_{2m-2}^{(2m-1)} \\ +(4m-1)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)}\end{array}\right| x^2 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1}$$

Par conséquent

$$\begin{array}{l}
N_{2m} = 2m\alpha_0^{(2m-1)}x^{2m} + [(2m-1)\alpha_0^{2m-1)} + (2m+2)\alpha_2^{(2m-1)}]x^{2m-2} \\
\quad + [(2m-3)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m+4)\alpha_4^{(2m-1)}]x^{2m4} + \ldots \\
\quad + [(2m-2k-1)\alpha_{2k}^{(2m-1)} + (2m+2k+2)\alpha_{2k+2}^{(2m-1)}]x^{2m-2k-2} \\
\quad + \ldots + [3\alpha_{2m-4}^{(2m-1)} + (4m-2)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)}]x^2 + \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}.
\end{array}$$

Ceci nous donne le tableau suivant :

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_0^{(2m)} = 2m\alpha_0^{(2m-1)} \\
\alpha_0^{(2m)} = (2m-1)\alpha_0^{(2m-1)} + (2m+2)\alpha_2^{(2m-1} \\
\alpha_0^{(2n)} = (2m-3)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m+4)\alpha_4^{(2m-1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2k}^{(2m)} = (2m-2k+1)\alpha_{2k.2}^{(2m-1)} + (2m+2k)\alpha_{2k}^{(2m-1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2m-2}^{(2m)} = 3\alpha_{2m-4}^{(2m-1} + (4m-2)\alpha_{2m-2}^{(2m-1)} \\
\alpha_{2m}^{(2m)} = \alpha_{2m-2}^{(2m-1)}
\end{array}\right\} (B)$$

Toutes les formules du tableau (B) se déduisent des formules du tableau (A) en changeant $2m$ en $(2m - 1)$ (*). La dernière formule du tableau (B) peut se déduire de la dernière formule du tableau (A) si l'on suppose que $\alpha_{2m}^{2m-1} = 0$, ce qui est assez naturel.

IV. — Cela posé, le coefficient de la plus haute puissance de x se calcule immédiatement. En effet, on a

$$\left.\begin{array}{ll} \text{puis} & \alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)\alpha_0^{(2m)} \\ & \alpha_0^{(2m)} = 2m\alpha_0^{(2m-1)} \\ & \dots\dots\dots\dots \\ \text{enfin} & \alpha_0^{(2)} = 2\alpha_0^{(1)} \\ & \alpha_0^{1} = 1. \end{array}\right\} \qquad (\beta_0)$$

Si nous multiplions toutes ces équations membre à membre il vient $\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)!$ *(A suivre.)*

QUESTION 60

Première solution par M. GIAT, élève au Lycée de Moulins.

On donne une famille de coniques représentée par l'équation.

$$x^2(1 + \lambda) - 2\lambda xy + \lambda^2 y^2 - 2x = 0.$$

Par chaque point A *réel du plan passent deux coniques de la famille. Dans quelles régions doit être le point* A *pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients imaginaires, 2° à coefficients réels. Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres, suivant que par le point il passe deux ellipses ou deux hyperboles, ou une ellipse et une hyperbole. Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.*

α, β désignant les coordonnées d'un point A, par ce point passent deux coniques dont les équations sont l'équation (1) dans laquelle λ est défini par la relation

$$\alpha^2(1 + \lambda) - 2\lambda\alpha\beta + \lambda^2\beta^2 - 2\alpha = 0$$

ou

$$\lambda^2\beta^2 - \lambda\alpha(2\beta - \alpha) + \alpha(\alpha - 2) = 0. \qquad (2)$$

(*) Sans toucher évidemment aux indices inférieurs des coefficients.

Les coefficients de l'équation (1) seront réels quand on aura

$$\alpha^2(2\beta - \alpha)^2 - 4\alpha\beta^2(\alpha - 2) \geq 0$$

ou

$$\alpha(8\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^3) \geq 0.$$

Nous sommes amené à construire la courbe

$$8\beta^2 - 4\alpha\beta^2 + \alpha^3 = 0.$$

Cette courbe admet l'origine pour point double. Ce point est un point de rebroussement dont la tangente est $\beta = 0$.

Les directions asymptotiques sont $\alpha^2 = 0$, $4\beta - \alpha = 0$.

La première asymptote est rejetée à l'infini. Quant à la deuxième, on calcule facilement l'ordonnée à l'origine au moyen de la relation $d = \frac{-\varphi_1(c)}{\varphi'(c)}$. On trouve ainsi $d = \frac{1}{8}$.

Cela posé, la courbe est facile à construire. En résolvant par rapport à β, on a

$$\beta = \frac{\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}{4}. \qquad (3)$$

β sera réel pour toutes les valeurs de α non comprises entre 0 et 2. Pour $\alpha = 2$, $\beta = 1$, la tangente en ce point est verticale, ce qu'on reconnaît en transportant l'origine en ce point.

Discutant l'équation (3), on en déduit sans difficulté la courbe indiquée sur la figure (*).

Cette courbe ainsi que la droite $\alpha = 0$ séparent le plan en régions.

Dans les régions extérieures à la courbe que l'on vient de construire, il est facile de montrer que

$$8\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^3 \text{ est } > 0.$$

En effet, supposons α positif et très grand, γ négatif et très grand, l'inégalité précédente est satisfaite.

Alors dans les régions couvertes de hachures verticales on aura des coniques à coefficients imaginaires. Dans les autres régions au contraire on aura des coniques à coefficients réels.

(*) Voir la figure dans la seconde solution ; il est facile de distinguer les différents cas. *(Note de la rédaction.)*

Considérons ces dernières régions.

La condition pour que la conique (1) représente une ellipse est $\lambda > 0$.

Reportons-nous à l'équation (2). Pour que cette équation en λ ait ses deux racines positives, il faut que l'on ait

$$\alpha(\alpha - 2) > 0,$$
$$\alpha(2\beta - \alpha) > 0.$$

Construisons les droites $\alpha = 2$, $2\beta = \alpha$; soient BC et OA, BC est tangente à la courbe de séparation en A et OA rencontre cette courbe aux points O et A.

Dans la région BAE $\alpha(\alpha - 2)$ est > 0, ainsi que $\alpha(2\beta - \alpha)$. Donc dans cette région il passera deux ellipses.

Dans la région DAC au contraire $\alpha(\alpha - 2)$ est < 0, $\alpha(2\beta - \alpha) < 0$, On aura donc deux hyperboles.

Dans la région comprise entre l'axe de y et BC, on aura une ellipse et une hyperbole : car $\alpha(\alpha - 2)$ est < 0.

Enfin dans la région HOF, $\alpha(\alpha - 2)$ est positif, mais $\alpha(2\beta - \alpha)$ est négatif. On aura donc deux hyperboles dans cette région.

2° Pour avoir le lieu des centres des coniques (1) nous allons annuler $f'x$ et $f'y$, puis éliminer λ entre ces deux équations :

$$f'x = x(1 + \lambda) - \lambda y - 1 = 0.$$
$$f'y = \lambda x - \lambda^2 y = 0,$$

Éliminant λ entre ces deux équations on a le lieu dont l'équation se décompose en deux:

$$x = 1$$

et

$$x = y^2.$$

La première équation représente une droite parallèle à $y = 0$ à une distance de celle-ci égale à 1.

La deuxième est une parabole rapportée à son sommet ; son axe est dirigé suivant OY. Son intersection avec la droite $x = 2$ est le point

$$x = 2y = 4.$$

Distinguons sur cette parabole les parties du lieu qui proviennent d'ellipses ou d'hyperboles.

Nous remarquons que pour que l'équation (1) représente

une parabole, il faut que $\lambda = 0$. Or pour cette valeur cette équation se réduit à

$$x(x - 2) = 0,$$

qui représente l'axe des y et la droite BC.

Donc l'équation (1) ne représentera jamais une parabole. Dans le cas particulier que l'on examine, nous remarquons que les points situés sur $x = 1$ sont des centres de $x(x - 2) = 0$. La droite $x = 1$ que l'on trouvait comme lieu est ainsi interprétée.

L'intersection de cette droite avec $x^3 = y$ est le point $x = 1$, $y = 1$. Ce point sur le lieu sert de séparation, pour les centres d'ellipses et les centres d'hyperboles. Sur l'arc de parabole IM on aura des centres d'ellipses et sur l'arc de parabole IN on aura des centres d'hyperboles.

Deuxième solution par M. Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

On donne une famille de coniques représentées par l'équation

$$x^2(1 + l) - 2lxy + l^2y^2 - 2x = 0.$$

Par chaque point A réel du plan passent deux coniques de la famille; dans quelle région doit être le point pour que ces coniques aient une équation : 1° à coefficients réels; 2° à coefficients imaginaires. — Subdiviser ces dernières régions en plusieurs autres, suivant que par le point A il passe deux ellipses, ou deux hyperboles, ou une ellipse ou une hyperbole.

Lieu des centres des coniques. Séparer sur ce lieu les centres d'ellipses des centres d'hyperboles.

I. — Si nous exprimons que la conique passe par le point A(x . y), les valeurs de l qui déterminent cette conique seront données par l'équation du deuxième degré

$$l^2y^2 - lx(2y - x) + x(x - 2) = 0.$$

Donc, par chaque point, il passe deux coniques.

Les valeurs de l données par cette équation seront réelles ou imaginaires, suivant que la quantité

$$x^2(2y - x)^2 - 4xy^2(x - 2)$$

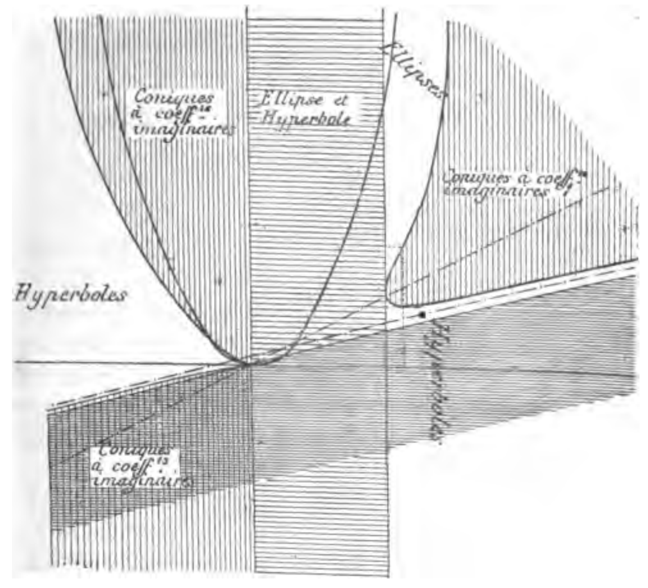
sera positive ou négative. Les points demandés seront donc

séparés par la courbe

$$x^2(2y - x)^2 - 4xy^2(x - 2) = 0, \qquad (1)$$

ou

$$x[x^2(x - 4y) + 8y^2] = 0. \qquad (2)$$



L'équation (2) indique que la courbe est séparée en régions par la droite $x - 4y = 0$, et l'équation (1) indique que la courbe est séparée en régions par la droite $x = 2$, et qu'elle est tangente à cette droite au point où celle-ci est rencontrée par la droite $2y - x = 0$.

D'ailleurs, la courbe est tangente à l'origine à l'axe des x, et présente un point de rebroussement.

Asymptotes. — La courbe a une asymptote parallèle à l'axe des y, transportée à l'infini.

Elle admet aussi une asymptote parallèle à la droite $x - 4y = 0$ et dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{8}$.

Points où la tangente est horizontale. — Ils sont donnés par les équations

$$f(x\,.\,y) = x^2(x - 4y) + 8y^2 = 0,$$

$$f'(x) = 2x^2 - 8xy = 0,$$

ce qui donne les points

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{27}{32}. \end{cases}$$

Point d'inflexion. — Le hessien se réduit à

$$3x - 4y = 0,$$

ce qui donne un point d'inflexion $\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{27}{16} \end{cases}$

On voit alors que les points correspondant aux coefficients imaginaires sont ceux situés dans les parties recouvertes de hachures verticales; les autres points du plan correspondent à des coniques réelles, et ceux qui sont situés sur la courbe correspondent au cas de deux coniques confondues.

II. — Le déterminant de la conique étant égal à $-l^3$, on obtient le genre de la conique au moyen des valeurs de l correspondant au point. — Le produit des racines de l'équation en l étant $\frac{x(x-2)}{y^2}$, pour tous les points situés entre les droites $x = 0$, $x = 2$, nous aurons une ellipse et une hyperbole. Pour les points extérieurs nous séparerons les ellipses des hyperboles au moyen de la somme des racines de l'équation en l : $\frac{x(2y-x)}{2}$. Nous aurons des ellipses lorsque cette somme sera positive, des hyperboles lorsque cette somme sera négative.

Pour tous les points de l'axe des y, nous avons des paraboles. Les valeurs de l sont nulles, et l'équation se réduit à

$$x(x-2) = 0.$$

Sur la droite $x = 2$, nous aurons une ellipse et une parabole pour les points situés au-dessus de la droite $2y = x$; nous aurons deux paraboles pour les points situés sur cette droite; une parabole et une hyperbole pour les points situés au-dessus.

Lieu des centres. — Il s'obtient par l'élimination de l entre les deux équations

$$f'y = l^2y - lx = 0,$$
$$f'x = lx - ly + x - 1 = 0.$$

La deuxième donne

$$l = 0, \ l = \frac{x}{y},$$

La première donne

$$x = 1, \ x^2 = y.$$

Le premier lieu correspond au cas où la conique se réduit aux droites $x(x - 2) = 0$.

Dans la parabole qui représente le deuxième lieu, la valeur de l étant égale à $\frac{x}{y}$, les points situés à droite de l'axe des y appartiendront à des ellipses, et ceux à gauche appartiendront à des hyperboles.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Poncet, Roussel, à Lyon; Lapinte, à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

122. — On considère une elilpse Γ rapportée à ses axes. Désignons par P et Q les extrémités du grand axe, et imaginons, sur Γ, un point mobile M. Les droites PM et QM rencontrent le cercle Δ, décrit sur PQ comme diamètre, en des points A et B;

1° Trouver le lieu décrit par le pôle C de la droite AB, par rapport à Δ. Ce lieu est l'ellipse qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° Démontrer qu'en désignant par φ l'angle d'anomalie du point M, l'équation du cercle AMB est

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi + a^2 = 0.$$

3° Lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles AMB. Ce lieu est le cercle Δ lui-même.

4° Enveloppe des cercles AMB. On trouve deux cercles,

correspondant aux équations

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0.$$

5° Lieu des centres de similitude du cercle principal Δ et du cercle mobile AMB.

N. B. — *Les renseignements donnés dans cette question ont pour but d'en faciliter la solution. On doit pourtant observer qu'ils ne sont pas absolus, et qu'une erreur de calcul, de transcription ou d'impression est toujours possible.* (G. L.)

ERRATUM

Page 80, ligne 15, au lieu de *est à la même place*, lire : *est la même*.

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous envoient doivent porter en tête :

Le numéro de la question ;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient ;

L'énoncé complet de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions sans aucun avis d'envoi peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12072-4.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS NOUVELLES DES TRANSVERSALES RÉCIPROQUES

Par M. G. de Longchamps.

1. — Imaginons une courbe U formant la figure de référence et proposons-nous de transformer une autre courbe V d'après la loi suivante :

Ayant mené à V, *en un point* M, *une tangente* Δ, *cette droite rencontre* U *en un point* A *et l'on prend le symétrique de* M, *par rapport à* A ; *le lieu de ce point* M′ *est une certaine courbe* V′ *qui est transformée de* V, *d'après la loi que nous venons de formuler.*

Nous voulons montrer comment on peut construire la tangente au point M′, à V′ ; nous aurons à considérer, dans

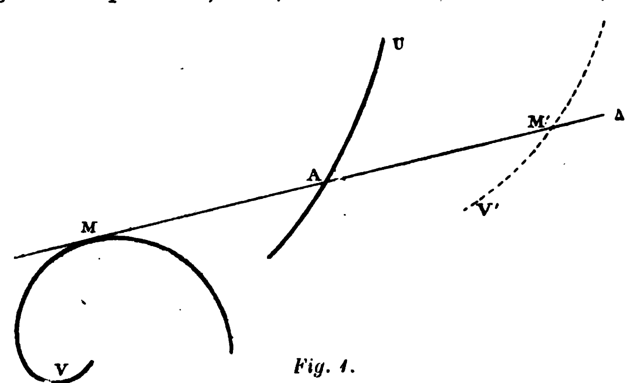


Fig. 1.

les explications qui suivent, ces droites que nous avons nommées *transversales réciproques ;* et nous établirons d'abord, à propos d'elles, un théorème très simple.

2. **Théorème.** — *Si l'on considère un triangle* ABC, *et une transversale* Δ ; *la transversale réciproque* Δ′ *est un diamètre de la parabole* U *qui est inscrite au quadrilatère formé par ce triangle* ABC *et par* Δ.

Considérons, en effet, la droite Δ qui coupe les côtés du triangle ABC, aux points A', B', C'; prenons les points A'', B'', C'', symétriques des points A', B', C', par rapport aux milieux des côtés de ABC, et soit Δ' la droite qui passe par A'', B'' et C''. Le quadrilatère complet formé par le triangle ABC et par la droite Δ a pour diagonales les droites AA', BB', CC', dont les milieux sont représentés en α, β et γ. Nous allons d'abord remarquer que les points α, β, γ, forment un système homothétique avec A'', B'' et C''; l'homothétie est inverse, le rapport est égal à $1/2$ et le centre de l'homothétie est le centre de gravité du triangle ABC.

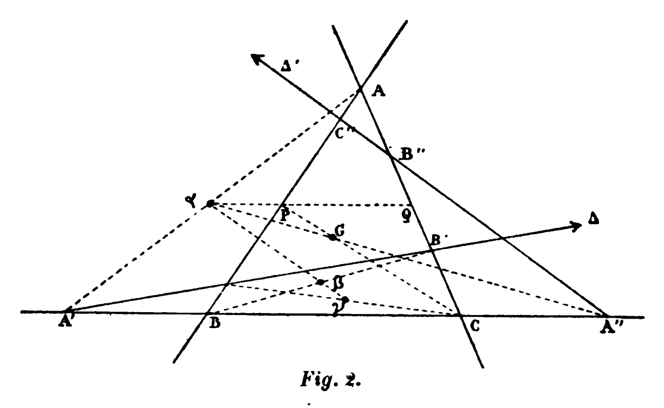


Fig. 2.

En effet, menons par α une parallèle à BC, elle passe par le point P, milieu de AB, et par le point Q, milieu de AC. Nous avons d'ailleurs

$$A'B = 2\alpha P,$$

et, par suite, $$A''C = 2\alpha P.$$

Il résulte de cette remarque que $A''\alpha$ passe par le point G qui partage CP dans le rapport de 1 à 2, c'est-à-dire par le centre de gravité de ABC.

Cette observation s'applique aux droites $B''\beta$, $C''\gamma$, qui, elles aussi, passent par le centre de gravité de ABC et s'y partagent mutuellement dans le rapport de 1 à 2.

D'autre part, on sait, par le théorème de Newton sur les coniques inscrites dans un quadrilatère, que la droite $(\alpha\beta\gamma)$ est le lieu des centres de ces coniques; ainsi $(\alpha\beta\gamma)$ est paral-

lèle à l'axe de la parabole U; la droite $A''B''C''$, transversale réciproque de $A'B'C'$ est donc parallèle aux diamètres de la parabole inscrite au triangle ABC et tangente à $A'B'C'$.

3. — Cette remarque étant faite, considérons deux tangentes voisines AA', BB', sur la courbe V, et prenons

$$A'A'' = AA', \quad B'B'' = BB',$$

les points A'', B'', appartiennent à la courbe V', transformée de V d'après la loi que nous avons adoptée, et nous nous proposons de déterminer la position limite de $A''B''$ quand le point B vient coïncider avec A.

A cet effet, prenons

$$A''P = MA \text{ et } B''Q = MB,$$

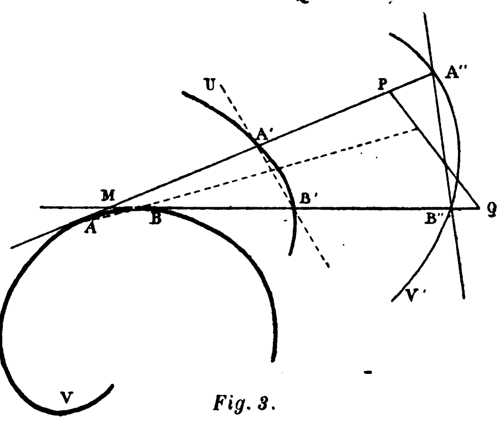


Fig. 3.

les droites AB et $A''B''$ sont deux transversales réciproques par rapport au triangle MPQ. D'après le théorème que nous avons établi tout à l'heure, la droite $A''B''$ est donc parallèle au diamètre de la parabole inscrite au triangle MPQ, et tangente à la droite AB.

Nous allons chercher ce que devient cette parabole quand les points A et B se confondent.

Les droites MA, MB et AB sont trois tangentes à la parabole qui nous occupe, et le cercle circonscrit au triangle AMB passe par le foyer de cette courbe. A la limite, le cercle circonscrit à AMB devient le cercle, Δ décrit sur la droite qui joint le centre de courbure, au point A, comme diamètre.

D'autre part, le cercle circonscrit à MPQ, cercle qui passe, lui aussi, par le foyer de la parabole, a pour position limite la circonférence Δ' qui passe par A par A'' et qui est tangente, au point A'', à la droite A''T'' menée par A'' parallèlement à A'T'; cette dernière droite étant la tangente à la courbe U, au point A'. Le point F, ainsi déterminé par l'intersection des cercles Δ et Δ', est le foyer de la parabole.

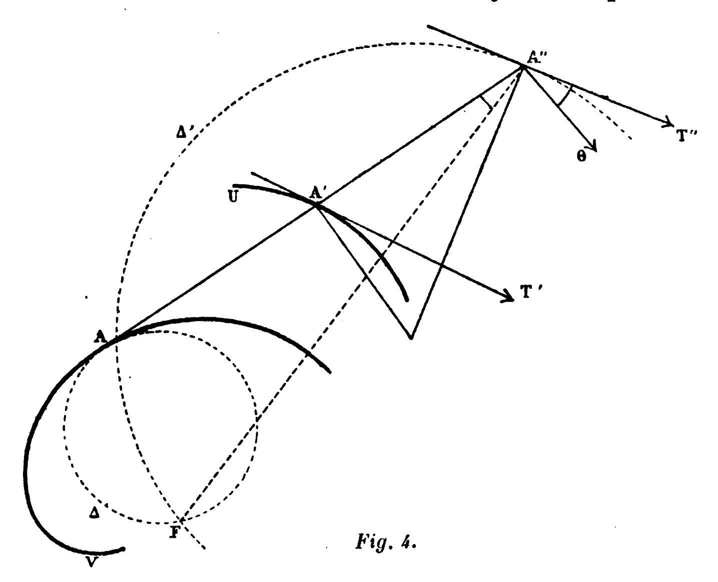


Fig. 4.

Si l'on considère maintenant les demi-droites A''A et A''T'', qui forment un angle inférieur à π et qui comprennent le point F; la droite A''θ, *droite bien déterminée*, qui est symétrique de A''F par rapport à la bissectrice de l'angle AA''T'', est la tangente cherchée.

Mais on peut encore étendre les considérations qui précèdent à des transformations plus générales que celle qui vient de nous occuper, comme nous allons le montrer.

4. — Considérons, comme tout à l'heure, une courbe V que nous nous proposons de transformer; mais au lieu de constituer la figure de référence avec une courbe U, supposons que cette figure soit formée par deux courbes U_1, U_2.

Si nous menons à V une tangente quelconque et si nous prenons

$$R_2M' = MR_1$$

le lieu décrit par le point M' est une certaine courbe V' transformée de V, par la loi que nous venons d'imaginer.

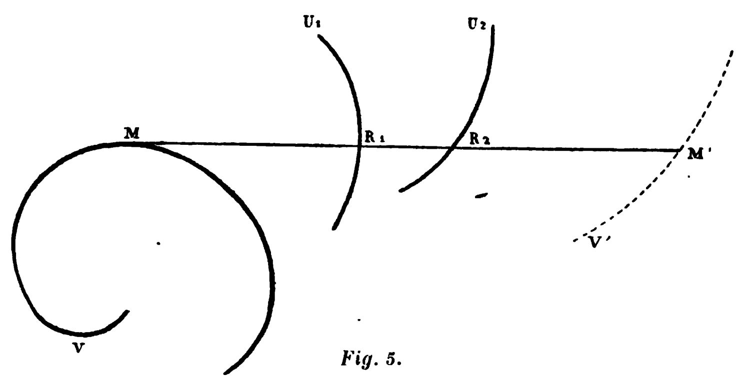


Fig. 5.

Lorsque les courbes U_1 et U_2 coïncident, on retombe dans la transformation définie plus haut. Nous nous proposons de construire la tangente, au point M', à la transformée V'.

Nous supposons, bien entendu, que l'on sache tracer les tangentes aux courbes V, U_1, U_2, et aussi le cercle osculateur en un point donné sur la courbe V.

5. — Considérons deux tangentes voisines AA', BB', à V et prenons

$$A_2A' = AA_1, \quad B_2B' = BB_1;$$

nous voulons trouver la position limite de A'B' quand B se confond avec A.

A cet effet, prenons

$$A'\alpha = MA, \quad B'\beta = MB \ (*).$$

Les trois segments

$$A_1A_2, \quad M\alpha, \quad AA'$$

(*) Il faut bien observer que, dans les égalités que nous considérons ici, comme dans toutes les relations de la géométrie des transversales, les segments ont un signe bien déterminé ; et quand nous écrivons

$$B'\beta = MB,$$

nous entendons non seulement que ces deux longueurs sont égales, mais que la direction de B' à β est la même que celle de M à B.

ont le même point milieu; et cette remarque s'applique aux trois segments

$$B_1B_2, \ M\beta, \ BB'.$$

Les droites A_1B_1 et A_2B_2 sont donc deux transversales réciproques du triangle $M\alpha\beta$ et elles rencontrent $\alpha\beta$ en deux points qui sont symétriques par rapport au milieu de $\alpha\beta$.

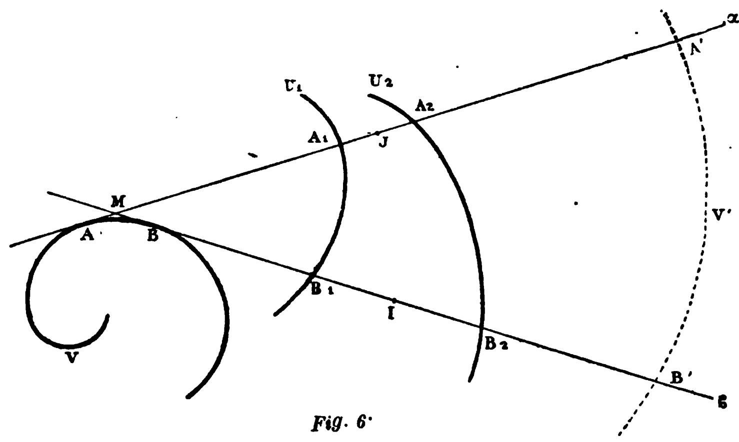


Fig. 6.

Lorsqu'on passe à la limite, lorsque le point B vient coïncider avec A, la droite $\alpha\beta$ a une position limite bien déterminée à Δ, qui s'obtiendra en menant par A' une droite partagée en deux parties égales par ce point et par les tangentes aux courbes U_1, U_2, aux points A_1, A_2.

6. — Revenons maintenant à la figure 6, et remarquons que AB et A'B' sont aussi deux transversales réciproques du triangle $M\alpha\beta$; ainsi, A'B' est parallèle aux diamètres de la parabole qui est inscrite au triangle $M\alpha\beta$ et qui est tangente à AB.

A la limite, le foyer de cette parabole appartient au cercle osculateur de V, au point A, et comme la parabole est tangente à $\alpha\beta$, par suite, à la droite Δ que nous avons déterminée tout à l'heure, le foyer s'obtient comme nous l'avons expliqué plus haut *(fig. 4)*. On en déduit la direction des diamètres et, par conséquent, la tangente, limite des positions de A'B'. *(A suivre.)*

NOTE D'ANALYSE RÉCURRENTE

Par M. R. Levavasseur, élève au Lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 109.)

V. — De la formule $\alpha_0^{(2m+1)} = (2m+1)!$ on déduit

$$\alpha_0^{(2m)} = (2m)!$$

Alors la seconde des formules du tableau (A) nous donne

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha^{(2m+1)} = (2m+3)\alpha_2^{(2m)} + 2m\,.\,(2m)! \\
\text{on a aussi}\quad \alpha_2^{(2m)} = (2m+2)\alpha_2^{(2m-1)} + (2m-1)(2m-1)! \\
\alpha_2^{(2m-1)} = (2m+1)\alpha_2^{(2m-2)} + (2m-2)(2m-2)! \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_2^{(2m-k)} = (2m-k+2)\alpha_2^{2m-k-1} + (2m-k-1)(2mk-1)! \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_2^4 = 6\alpha_2^{(3)} + 3\,.\,3! \\
\alpha_2^{(3)} = 5\alpha_2^{(2)} + 2\,.\,2!
\end{array}\right\}(\beta_2)$$

Enfin nous avons calculé $y^{(3)}$, et vu que dans cette dérivée $\alpha_2^{(2} = 1$. Je multiplie la première formule par 1, la seconde par $(2m+3)$, la troisième par $(2m+2)(2m+3)$, etc., la $(k+1)^e$ par $(2m+3)(2m+2)\dots(2m-k+4)(2m-k+3)$, etc., la $(2m-3)^e$ par $7\,.\,8\dots(2m+2)(2m+3)$, la dernière par $6\,.\,7\dots(2m+2)(2m+3)$, puis j'ajoute toutes ces équations membre à membre, ce qui me donne

$$\begin{array}{l}
\alpha_2^{(2m+1)} = 2m\,(2m)! + (2m-1)(2m-1)!\,(2m+3) \\
\quad + (2m-2)(2m-2)!\,(2m+2)(2m+3) + \dots\dots\dots \\
\quad + (2m-k-1)(2m-k-1)!\,(2m-k+3) \\
\quad \times (2m-k+2)\dots(2m+2)(2m+3) + \dots \\
\quad + 3\,.\,3!\,7\,.\,8\dots(2m+2)(2m+3) \\
\quad + 2\,.\,2!\,6\,.\,7\dots(2m+2)(2m+3) \\
\quad + 1\,.\,1!\,5\,.\,6\dots(2m+2)(2m+3),
\end{array}$$

ou bien

$$\alpha_2^{(2m+1)} = (2m+3)!\left[\frac{2m}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)} + \frac{2m-1}{2m(2m+1)(2m+2)} + \frac{2m-2}{(2m-1)2m(2m+1)} + \dots + \frac{2m-k-1}{(2m-k)(2m-k+1)(2m-k+2)} + \dots + \frac{3}{4\,.\,5\,.\,6} + \frac{2}{3\,.\,4\,.\,5} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\right].$$

La question revient donc à sommer la série de fractions comprise entre les parenthèses.

VI. — On a d'abord

$$S_1 = \frac{1}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} = \frac{1 \,.\, 2}{2^2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

puis

$$S_2 = \frac{1 \,.\, 2}{2^2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{2}{3 \,.\, 4 \,.\, 5} = \frac{2}{3 \,.\, 4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2 \,.\, 3^2}{2^2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$$
$$= \frac{2 \,.\, 3}{2^2 \,.\, 4 \,.\, 5}.$$

En général, soit

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2^2(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2^2(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)}\left[\frac{n-1}{2^2} + \frac{1}{n+3}\right]$$

Mais $(n-1)(n+3) + 2^2 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Donc $$S_n = \frac{n(n+1)}{2^2(n+2)(n+3)}.$$

La quantité entre parenthèse est donc

$$S_{2m} = \frac{2m \,.\, (2m+1)}{2^2(2m\ 2) + (2m+3)}.$$

Il en résulte que la formule de $\alpha_2^{(2m+1)}$ devient

$$\alpha_2^{(2m+1)} = (2m+3)!\frac{2m(2m+1)}{2^2(2m+2)(2m+3)} = (2m-1)!\left[\frac{2m.(2m+)1}{2}\right]^2$$

VII. — Connaissant la formule qui donne $\alpha_2^{(2m+1)}$, nous pouvons maintenant chercher celle qui donne $\alpha_1^{(2m+1)}$. En effet $\alpha_2^{(2m)} = (2m-2)!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2$. La troisième formule du tableau (A) devient

$$\alpha_4^{(2m+1)} = (2m+5)\alpha_1^{(2m)} + (2m-2)(2m-2)!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2$$

puis j'en déduis

$$\alpha_4^{(2m)} = (2m+4)\alpha_4^{(2m-1)} + (2m-3)(2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)}{2}\right]^2$$

$$\alpha_4^{(2m-1)} = (2m+3)\alpha_4^{(2m-2)} + (2m-4)(2m-4)!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}\right]^2$$

. . . .

$$\alpha_4^{(2m-k)} = (2m-k+4)\,\alpha_4^{(2m-k-1)} + (2m-k-3)(2m-k-3)!\left[\frac{(2m-k-2)(2m-k-1)}{2}\right]^2$$

. . . .

$$\alpha_4^{(6)} = 10\,\alpha_4^{(5)} + 3\,.\,3!\left[\frac{4\,.\,5}{2}\right]^2$$

$$\alpha_4^{(5)} = 9\,\alpha_4^{(4)} + 2\,.\,2!\left[\frac{3\,.\,4}{2}\right]^2$$

$$\alpha_4^{(4)} = \alpha_2^{(3)} = 1\left[\frac{2\,.\,3}{2}\right]$$

Je multiplie la première de ces équations par 1, la deuxième par $(2m+5)$, la troisième par $(2m+4)(2m+5)$, . . . la $(k+1)^e$ par

$$(2m-k+5)(2m-k+6)\ \ldots\ (2m+4)(2m+5),\ \ldots$$

la $(2m-4)^e$ par

$$11\,.\,12\ \ldots\ (2m+4)(2m+5),$$

la $(2m-3)^e$ par

$$10\,.\,11\ \ldots\ (2m+4)(2m+5),$$

la dernière par

$$9\,.\,10\ \ldots\ (2m+4)(2m+5),$$

puis j'ajoute, ce qui me donne

$$\alpha_4^{(2m+1)} = (2m-2)(2m-2)!\left[\frac{2m-1)\,2m}{2}\right]^2$$

$$+ (2m-3)(2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)}{2}\right]^2(2m+5)$$

$$+ (2m-4)(2m-4)!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}\right]^2(2m+4)(2m+5)$$

$$+ \ldots + (2m-k-3)(2m-k-3)!\left[\frac{(2m-k-2)(2m-k-1}{2}\right]^2$$

$$(2m-k+5)\ \ldots\ (2m+4)(2m+5) + \ldots + 3\,.\,3!$$

$$\left(\frac{4\,.\,5}{2}\right)^2 11\,.\,12\ldots(2m+4)(2m+5) + 2\,.\,2!\left(\frac{3\,.\,4}{2}\right)^2$$

$$10\,.\,11\ldots(2m+4)(2m+5) + 1\,.\,1!\left(\frac{2\,.\,3}{2}\right)^2.\ 9\,.\,10\ldots$$

$(2m+4)(2m+5)$ ou bien $\alpha_4^{(2m+1)} = \dfrac{(2m+5)!}{2}$

$$\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}\right.$$
$$+\frac{(2m-3)(2m-2)(2m-1)}{2m(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}$$
$$+\frac{(2m-4)(2m-3)(2m-2)}{(2m-1)2m(2m+1)(2m+2)(2m+3)}$$
$$+\ldots+\frac{(2m-k-3)(2m-k-2)(2m-k-1)}{(2m-k)(2m-k+1)(2m-k+2)(2m-k+3)(2m-k+4)}$$
$$+\ldots+\frac{3\cdot4\cdot5}{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}+\frac{2\cdot3\cdot4}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$$
$$\left.+\frac{1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\right].$$

Reste à sommer la série de fractions comprises dans les parenthèses.

VIII. — Or $S_1 = \dfrac{1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$

$$= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{4^2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}.$$

J'en déduis $S_2 = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{4^2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$

$$+\frac{2\cdot3\cdot4}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$$

ou $S_2 = \dfrac{2\cdot3\cdot4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}\left[\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{9}\right] = \dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5^2}{4^2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$

$$= \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{4^2\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$$

Soit en général $S_{n-1} = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4^2\cdot(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4^2(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\left[\frac{n-1}{4^2}+\frac{1}{n+7}\right].$$

Mais $(n-1)(n+7)+4^2 = n^2+6n+9 = (n+3)^2$.

Donc $$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4^2(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}$$

J'en déduis $S_{2m-2} = \dfrac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{4^2(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}$

Donc
$$\alpha_4^{(2m+1)} = \frac{(2m+5)!}{2^2} \cdot \frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{4^2\cdot(2m+2)(2m+3)(2m+4)(2m+5)}$$
$$= (2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{2\cdot 4}\right]^2.$$

IX. — Connaissant $\alpha_4^{(2m+1)}$, on pourra calculer le coefficient suivant, $\alpha_6^{(2m+1)}$, et ainsi de suite de proche en proche. En général, supposons que l'on ait démontré que
$$\alpha_{2k}^{(2m+1)} = (2m-k+1)!\left[\frac{(2m-2k+2)(2m-2k+3)\ldots 2m(2m+1)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2$$
et calculons le coefficient suivant.

On a
$$\alpha_{2k}^{(2m)} = (2m-2k)!\left[\frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)\ldots(2m-1)2m}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2$$
Je puis alors former le tableau suivant :

$$(\beta_{2k+2})\left\{\begin{array}{l}
\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m+2k+3)\,\alpha_{2k+2}^{(2m)} + (2m-2k)(2m-2k)!\left[\dfrac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)\ldots(2m-1)2m}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 \\
\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m+2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(2m-1)} + (2m-2k-1)(2m-2k-1)!\left[\dfrac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots(2m-2)(2m-1)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 \\
\qquad = (2m+2k+1)\,\alpha_{2k+2}^{(2m-2)} + (2m-2k-2)(2m-2k-2)!\left[\dfrac{(2m-2k-1)(2m-2k)\ldots(2m-3)(2m-2)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{2k+2}^{(h)} = (h+2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(h-2)} + (h-2k-1)(h-2k-1)!\left[\dfrac{(h-2k)(h-2k+1)\ldots(h-2)(h-1)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{2k+2}^{(2k+4)} = (4k+6)\,\alpha_{2k+2}^{(2k+3)} + 3.3!\left[\dfrac{4.5\ldots(2k+2)(2k+3)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right] \\
\alpha_{2k+2}^{(2k+3)} = (4k+5)\,\alpha_{2k+2}^{(2k+2)} + 2.2!\left[\dfrac{3\cdot 4\ldots(2k+1)(2k+2)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 \\
\alpha_{2k+2}^{(2k+2)} = \qquad \alpha_{2k}^{2k+1} = 1.1!\left[\dfrac{2\cdot 3\ldots 2k(2k+1)}{2\cdot 4\ldots(2k-2)2k}\right]^2
\end{array}\right.$$

Je multiplie la première équation de ce tableau par 1, la deuxième par

$$2m + 2k + 3,$$

la troisième par

$$(2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3), \ldots$$

la $(m - h + 2)^e$ par

$$(h + 2k + 3)(h + 2k + 4) \ldots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3),$$

... la $(2m - 2k - 2)^e$ par

$$(4k + 7) \ldots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3),$$

la $(2m - 2k - 1)^e$ par

$$(4k + 6)(4k + 7) \ldots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3),$$

la dernière par

$$(4k + 5)(4k + 6) \ldots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3);$$

puis j'ajoute et j'ai $\alpha_{2k+2}^{(2m+1)} = (2m$

$$- 2k)(2m - 2k)! \left[\frac{2m - 2k + 1)(2m - 2k + 2) \ldots (2m - 1)2m}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]^2$$

$$+ (2m - 2k - 1)(2m - 2k - 1)! \left[\frac{(2m - 2k) \ldots (2m - 1)}{2 \ldots (2k)}\right]^2$$

$$(2m + 2k + 3) + (2m - 2k - 2)(2m - 2 - 2)!$$

$$\left[\frac{(2m - 2k - 1)(2m - 2k) \ldots (2m - 3)(2m - 2)}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]$$

$$2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3) + \ldots \ldots \ldots +$$

$$+ (h - 2k - 1)(h - 2k - 1! \left[\frac{(h - 2k)(h - 2k + 1) \ldots (h - 2)(h - 1)}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]^2$$

$$(h + 2k + 3) \ldots (2m + 2k + 3) + \ldots + 3.3! \left[\frac{4.5 \ldots (2k + 2)(2k + 3)}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]^2$$

$$4k + 7)(4k + 8) \ldots (2m + 2k + 3) + 2.2! \left[\frac{3.4 \ldots (2k + 1)(2k + 2)}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]^2$$

$$(4k + 6)(4k + 7) \ldots (2m + 2k + 3) + 1. \left[\frac{2.3 \ldots 2k(2k + 1)}{2.4 \ldots (2k - 2)2k}\right]^2 . (4k$$

$$+ 5)(4k + 6) \ldots (2m + 2k + 3).$$

Ou bien

$$\alpha_{2+2k}^{(2m+1)} = \frac{(2m + 2k + 3)!}{[2.4 \ldots (2k - 2)2k]^2}$$

$$\left[\frac{(2m - 2k)(2m - 2k + 1) \ldots (2m - 1)2m}{(2m + 1)(2m + 2) \ldots (2m + 2k + 2)(2m + 2k + 3)}\right.$$

$$+ \frac{(2m - 2k - 1)(2m - 2k) \ldots (2m - 2)2m - 1}{2m(2m + 1) \ldots (2m + 2k + 1)(2m + 2k + 2)}$$

$$+\frac{(2m-2k-2)(2m-2k-1)\ldots(2m-3)(2m-2)}{(2m-1)2m\ldots(2m+2k)(2m+2k+1)}$$
$$+\ldots+\frac{(h-2k-1)(h-2k)\ldots(h-2)(h-1)}{h(h+1)\ldots(h+2k+1)(h+2k+2)}+\ldots$$
$$+\frac{3.4\ldots(2k+2)(2k+3)}{(2k+4)(2k+5)\ldots(4k+5)(4k+6)}$$
$$+\frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)(4k+5)}$$
$$+\left.\frac{1.2\ldots 2k(2k+1)}{(2k+2)(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}\right].$$ Le problème revient à sommer la série de fractions entre parenthèses.

X. — Or on a $S_1=\dfrac{1.2\ldots 2k(2k+1)}{(2k+2)(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}$
$$=\frac{1.2\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)^2(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}.$$
$$S_2=\frac{1.2\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)^2(2k+3)\ldots(4k+3)(4k+4)}$$
$$+\frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)(4+5)}$$
$$=\frac{2.3\ldots(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+4)\ldots(4k+4)}\left[\frac{1}{(2k+2)^2}+\frac{1}{4k+5}\right].$$
Or $(2k+2)^2+(4k+5)=4k^2+12k+9=(2k+3)^2$;

donc $S_2=\dfrac{2.3\ldots(2k+2)(2k+3)}{(2k+2)^2(2k+4)\ldots(4k+4)(4k+5)}.$

Soit en général,
$$S_{n-1}=\frac{(n-1)n\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(2k+2)^2(n+2k+1)(n+2k+2)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}$$
$$S_n=\frac{(n-1)n\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(2k+2)^2(n+2k+1)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}$$
$$+\frac{n(n+1)\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(n+2k+1)\ldots(n+4k+2)(n+4k+3)}$$
$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+2k-1)(n+2k)}{(n+2k+1)\ldots(n+4k+1)(n+4k+2)}\left[\frac{n-1}{(2k+2)^2}+\frac{1}{n+4k+3}\right]$$
Or $(n-1)(n+4k+3)+(2k+2)^2=n^2+4k^2+1+4kn+4k+2n=(n+2k+1)^2$.

Donc $S_n=\dfrac{n(n+1)\ldots(n+2k)(n+2k+1)}{(2k+2)^2(n+2k+2)\ldots(n+4k+2)(n+4k+3)}.$

Ainsi $S_{2m-2k} = \dfrac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{(2k+2)^2(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2k+3)}$.

Alors $\quad x^{(2m+}_{2k+2} = \dfrac{(2m+2k+3)!}{[2.4\ldots(2k-2)2k]^2}$.

$$\frac{(2m-k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1}{(2k+2)^2(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2k+3)}$$

$$= (2m-2k-1\left[\frac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2k-2)2k(2k+2)}\right]^2.$$

XI. — On a donc $y^{(2m+2)}\sqrt{(1-x^2)^{4m+3}} = (2m+1)!\,x^{2m+}$

$$+(2m-1)!\left[\frac{2m(2m+1)}{2}\right]x^{2m+1}$$

$$+(2m-3)!\left[\frac{(2m-2)(2m-1)2m(2m+1)}{2.4}\right]^2 x^{2m-3}+\ldots$$

$$+(2m-2k-1)!\left[\frac{(2m-2k)(2m-2k+1)\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots 2k(2k+2)}\right]^2 x^{2m-2k-1}$$

$$+\ldots+5!\left[\frac{6.7\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2m-6)(2m-4)}\right]^2 x^5$$

$$+3!\left[\frac{4.5\ldots 2m(2m+1)}{2.4\ldots(2m-4)(2m-2)}\right]^2 x^3$$

$$+1!\left[\frac{2.3\ldots 2m.(2m+1)}{2.4\ldots(2m-2)2m}\right]^2 x \text{ et } y^{(2m+1)}\sqrt{(1-x^2)^{4m+1}}$$

$$=(2m)!\,x^{2m}+(2m-2)!\left[\frac{(2m-1)2m}{2}\right]^2 x^{2m-2}$$

$$+(2m-4)!\left[\frac{(2m-3)(2m-2)(2m-1)2m}{2.4}\right]^2 x^{2m-4}+\ldots$$

$$+(2m-2k)!\left[\frac{(2m-2k+1)(2m-2k+2)\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2k-2)2k}\right]^2 x^{2m-2k}$$

$$+\ldots+2!\left[\frac{3.4\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2m-4)(2m-2)}\right]^2 x^2+\left[\frac{1.2\ldots(2m-1)2m}{2.4\ldots(2m-2)2m}\right]^2.$$

XII. — Voici une remarque intéressante sur les fonctions N_0, N_1, etc. ... Np.

On a $N_0 = 1$; $N_1 = x$; $N'_1 = 1 = 1^2N_0$.

$N_2 = 2x^2 + 1$, donc $N'_2 = 4x = 2^2N_1$.

$N_3 = 6x^3 + 9x$, donc $N'_3 = 18x^2 + 9 = 3^2N_2$.

Ainsi l'on a $N'_2 = 1^2N_0$; $N'_2 = 2^2N_1$; $N'_3 = 3^2N_2$.

En général supposons que $N'_{p-1} = (p-1)^2N_{p-2}$.

On sait que $N_p = (1 - x^2)N'_{p-1} + (2p - 1)xN_{p-1}$.
Donc $N_p = (p-1)^2(1 - x^2)N_{p-2} + (2p-1)xN_{p-1}$.
Prenons la dérivée des deux membres :

$$N'_p = (p-1)^2(1 - x^2)N'_{p-2} - 2x(p-1)^2N_{p-2} + (2p-1)N_{p-1} + (2p-1)xN'_{p-1}.$$

ou

$$N'_p = (2p-1)x(p-1)^2N_{p-2} + (p-1)^2(1-x^2)N'_{p-2} + (2p-1)N_{p-1} = (p-1)^2[(2p-3)xN_{p-2} + (1-x^2)N'_{p-2}] + (2p-1)N_{p-1} - 2x(p-1)^2N_{p-2}.$$

Donc $N'_p = [(p-1)^2 + 2p - 1]N_{p-1} = p^2N_{p-1}$.
N_p est la primitive de N_{p-1} multipliée par le carré de p.

Note de la Rédaction. — La question précédente a été traitée, par une méthode différente et beaucoup plus simple, par M. Catalan. (*Notes d'algèbre et d'analyse;* académie de Belgique, 1877). Le travail de M. Levavasseur a seulement de l'intérêt au point de vue de la marche élémentaire suivie par l'auteur.

QUESTION 68

Solution par M. Saillard, élève de Mathématiques spéciales, au Collège Chaptal.

Une ellipse passe par un point fixe A, *et touche une droite donnée en un de ses sommets. Le rapport de l'axe parallèle à la droite à celui qui lui est perpendiculaire est* m. *Par chaque point du plan passent deux ellipses satisfaisant à ces conditions. Lieu des points tels que les deux ellipses qui y passent soient orthogonales. Dans le cas où* m = 1, *on aura pour lieu un cercle et un cercle point. Démontrer ce fait par la géométrie élémentaire.*

L'équation d'une ellipse rapportée à un de ses axes et à la tangente à l'un des sommets correspondants est

$$\frac{x^2 \pm 2ax}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Rapportons l'ellipse à la tangente au sommet et à une parallèle au grand axe $y = \lambda$; son équation sera

$$\frac{x^2 \pm 2ax}{a^2} + \frac{(y+\lambda)^2}{b^2} = 0. \qquad (1)$$

Prenons le paramètre λ, tel que la droite $y = \lambda$ dans le premier système, passe par le point donné A.

Alors les coordonnées de A dans le dernier système seront

$$y = 0, \quad x = p.$$

L'ellipse passe par ce point; nous aurons donc

$$\frac{p^2 \pm 2ap}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} = 0. \qquad (2)$$

De plus, nous avons la relation

$$\frac{b}{a} = m. \qquad (3)$$

Éliminons a et b entre les équations (1), (2), (3) et nous aurons

$$\frac{m^2x^2 + (y + \lambda)^2}{m^2p^2 + \lambda^2} = \frac{x}{p},$$

équation générale des ellipses satisfaisant aux conditions données par l'énoncé, ou

$$m^2px^2 + p(y + \lambda)^2 - m^2p^2x - \lambda^2x + 0. \qquad (4)$$

Soit α, β, un point du lieu cherché; exprimons que l'ellipse passe par ce point, on aura

$$m^2p\alpha^2 + p(\beta + \lambda)^2 - m^2p^2\alpha - \lambda^2\alpha = 0. \qquad (5)$$

Si nous tirons de cette équation en λ deux valeurs de λ, λ_1, λ_2, et que nous portions successivement ces valeurs de λ dans l'équation (4), nous aurons les équations des deux ellipses satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et passant par (α,β).

Formons les coefficients angulaires des tangentes aux deux ellipses en (α,β), et exprimons que ces tangentes sont rectangulaires; nous aurons

$$\frac{2m^2p\alpha - m^2p^2 - \lambda_1^2}{2p(y + \lambda_1)} \cdot \frac{2m^2p\alpha - m^2p^2 - \lambda_2^2}{2p(y + \lambda_2)} = -1. \qquad (6)$$

Posons $m^2p = q$, l'équation (6) deviendra

$$\frac{q(2\alpha - p) - \lambda_1^2}{2p(y + \lambda_1)} \cdot \frac{q(2\alpha - p) - \lambda_2^2}{2p(y + \lambda_2)} = -1, \qquad (7)$$

ou

$$\frac{q^2(2\alpha - p)^2 - q(2\alpha - p)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2^2}{4p^2[\beta^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\beta + \lambda_1\lambda_2]} = -1. \qquad (8)$$

Mais dans cette dernière équation, nous avons des fonctions symétriques des racines λ_1, λ_2 de l'équation (5):

$$\lambda^2(p-\alpha)+2\lambda p\beta+q\alpha(a-p)+p\beta^2=0,$$

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2p\beta}{p-\alpha},\quad \lambda_1\lambda_2=\frac{p\beta^2}{p-\alpha}-q\alpha,$$

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=\frac{4p^2\beta^2}{(p-\alpha)^2}=\frac{2p\beta^2}{-\alpha}+2q\alpha.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (8), on aura

$$\frac{q^2(2\alpha-p)^2-q(2\alpha-p)\left[\frac{4p^2\beta^2}{(p-\alpha)^2}-\frac{2p\beta^2}{(p-\alpha)}+2q\alpha\right]+\left[\frac{p\beta^2}{p-\alpha}-q\alpha\right]^2}{4p^2\left[\beta^2-\frac{2p\beta}{p-\alpha}\beta+\frac{p\beta^2}{p-\alpha}-q\alpha\right]}=-1$$

qui est l'équation du lieu.

En remplaçant β par y, α par x; en effectuant les simplifications et en transportant l'origine au point $\begin{cases} y=0 \\ x=p \end{cases}$, on aura pour équation du lieu

$$(qx^2+py^2)^2=4p(p+x)[pq(x^2+y^2)-xy^2)-xy^2(p-q)]$$

ou bien, en remplaçant q par sa valeur $=m^2p$, on aura

$$[m^2x^2+y^2]^2-4(p+x)[pm^2(x^2+y^2)-xy^2(1-m^2)]=0.$$

Courbe du quatrième degré.

Construction de la courbe :

1° $m<1$.

Nous construirons d'abord les régions dans lesquelles se trouve la courbe.

Elle se trouve tout entière entre la droite $x=-p$ et la courbe $pm^2(x^2+y^2)-xy^2(1-m^2)=0$. Cette dernière courbe se construira facilement. Elle sera tout entière du côté des x positifs et symétriques par rapport à l'axe des $y\left(AB=\frac{pm^2}{1-m^2}\right)$; elle a un point isolé à l'origine.

La courbe qui est le lieu cherché n'a pas d'asymptotes; c'est une courbe fermée.

Elle a un point isolé à l'origine (les tangentes en ce point sont isotropes).

Les points où elle rencontre l'axe des y sont donnés par $y^4-4p^2m^2y^2=0$, $y=\pm 2pm$.

Ceux où elle rencontre l'axe des y seront donnés par $m^4x^4-4(p+x)pm^2x^2=0$, ou $m^4x^2-4px-4p^2=0$,

$$x=\frac{2p^2\ \sqrt{4p^2+4p^2m^2}}{m}.$$



Nous pouvons chercher les conditions pour qu'une parallèle à l'axe des y coupe la courbe en quatre points $m^4x^4 - 4(p + x)pm^2x^2 > 0$. Nous voyons que, dans ce cas, la courbe serait hors des régions déterminées, ce qui est impossible. La courbe affectera donc la forme d'un ovale, avec un point isolé à l'origine.

2° $m > 1$.

La discussion reste la même ; seulement l'asymptote de la courbe, limitant la région se trouve du côté des x négatifs.

La courbe se compose encore d'un ovale et d'un point isolé.

3° $m = 1$.

I. — Géométrie analytique.

L'équation devient dans ce cas :

$$x(x^2 + y^2)^2 - 4(p + x)(x^2 + y^2)p = 0.$$

Le lieu se dédouble en

$$x^2 + y^2 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 - 4p(p + x) = 0,$$

c'est-à-dire en deux cercles.

On pourrait prouver facilement ce fait par la géométrie élémentaire.

II.— Lorsque $m = 1$, les ellipses deviennent des cercles; or, lorsque deux cercles se coupent orthogonalement en un des points de concours, il en est de même en l'autre point d'intersection.

Transformons alors par rayons vecteurs réciproques en prenant pour centre d'inversion le point donné A.

Les deux cercles, considérés pour une position quelconque, se transforment en deux droites, rectangulaires, puisque les angles se conservent. La droite donnée se transforme en un cercle, auquel les deux droites rectangulaires sont tangentes; *le lieu du point d'intersection est donc un cercle* décrit avec R $\sqrt{2}$ comme rayon ; le tracé formé de ce cercle sera un *cercle ;* on trouvera un *cercle point* en prenant o pour puissance d'inversion. C. Q. F. D.



QUESTION 69

Solution par M. SAILLARD, élève de Mathématiques spéciales au collège Chaptal.

Des coniques sont circonscrites à un losange; la bissectrice des diagonales coupe l'une des coniques en deux points A *et* B. *De* B, *on mène la perpendiculaire* BH, *sur la tangente en* A, *lieu du point* H. — *Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur la tangente en* A. — *Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe à la polaire d'un point fixe.*

I. — En appelant a la distance OA, b la distance OB, l'équation de la droite AB est

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

en prenant pour axes les diagonales du losange.

L'équation de CD sera

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+1=0.$$

Enfin l'équation générale des coniques circonscrites au losange ABCD, sera

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-1+\lambda xy=0. \qquad (1)$$

Pour prendre le pied de la perpendiculaire BH, on décrira sur AB comme diamètre un cercle, et on prendra l'intersection de ce cercle avec les tangentes aux points A et B.

Le point O est centre de toutes les coniques de la famille considérée; donc ce point sera en même temps le centre du cercle dont nous cherchons l'équation.

L'équation générale des coniques passant par l'intersection de la conique (1) et de la droite $y=x$ est

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-1+\lambda xy+(y-x)\left(\frac{y}{\mu}-\frac{x}{\nu}\right)=0.$$

La condition pour que cette conique soit un cercle, est que l'on ait

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{2}{ab}+\lambda-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}=0.$$

L'équation de la circonférence sera donc

$$(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda\right\}-2=0. \qquad (2)$$

Cherchons maintenant l'équation de la tangente aux deux points A et B où la droite $y=x$ coupe les coniques (1).

$$x_0\left[\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}+\frac{\gamma}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}\,y+\frac{1}{b}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}\,x\right]-1=0, \qquad (3)$$

en appelant x_0, l'x des points A et B.

Cherchons sa valeur; elle sera donnée par l'équation (2) dans laquelle on fera $y=x$

$$x_0^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda}.$$

En portant cette valeur de x_0^2 dans l'équation (3)

$$\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}(x+y)\right]^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda. \qquad (4)$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira d'éliminer λ entre les équations (4) et (2), et on aura

$$\left[\frac{1}{2}(x-y)(b^2-a^2)(a^2+y^2)+a^2b^2(x+y)\right]^2=2a^4b^4(x^2+y^2)$$

Ce lieu se décompose en la droite $y=x$, qui ne fait pas partie du lieu proposé dans le problème, et en une courbe du 5e degré dont l'équation sera

$$(y-x)(x^2+y^2)^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(a^2-b^2)(x+y)(x^2+y^2)$$
$$+4a^4b^4(x-y)=0.$$

On voit facilement que l'origine est centre de la courbe, que la droite $y=x$ est asymptote, que la courbe a un point d'inflexion à l'origine; enfin qu'elle coupe les axes en des points toujours réels.

II. — Soit α . β le point fixe.

Le coefficient angulaire de la tangente en A est, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent (équation (4),

$$m=-\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda}{2}}$$

L'équation d'une droite passant par le point $\alpha\beta$ et perpen-

diculaire à la tangente sera donc

$$y-\beta=\frac{\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}+\frac{\lambda}{2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{\lambda}{2}}(x-\alpha). \qquad (1)$$

D'autre part l'équation des tangentes en A et B est (équation (4) du paragraphe précédent)

$$\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\frac{\lambda}{2}(x+y)\right]^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\lambda \quad (2)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant λ entre ces deux équations; cette équation sera

$$\left[\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right][(y-\beta)\,y+(x-\alpha)\,x]^2=[(y-\beta)^2-(x-\alpha)^2]$$

et en transportant l'origine au point $x=\alpha$, $y=\beta$, on aura

$$\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}[y(y+\beta)+x(x+\alpha)]^2=(y^2-x^2).$$

Cette équation est l'équation du lieu, et la courbe se construira facilement en remarquant que cette courbe a un point double à l'origine; qu'elle est tout entière entre les droites $y=x$ et $y=-x$, dans la partie coupée; qu'elle est tangente à ces deux droites, qu'elle coupe l'axe de y en deux points réels et l'axe des x en deux points imaginaires; de ces conclusions nous déduirons la forme de la courbe.

III. — Lieu du pied et la perpendiculaire abaissée d'un point fixe à la polaire d'un point fixe.

L'équation générale étant

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-1+\lambda xy=0,$$

l'équation de la polaire du point $(x_0\, y_0)$, sera

$$x\left[\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{a}+\lambda y_0\right]+y\left[\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{b}+\lambda x_0\right]-2=0$$

et celle de la perpendiculaire abaissée d'un point $(\alpha\beta)$,

$$(y-\beta)\left[\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{a}+\lambda y_0\right]$$
$$=(x-\alpha)\left[\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\frac{2}{b}+\lambda x_0\right]$$

et en éliminant λ entre ces deux équations, on obtien

l'équation du lieu

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)[y(y-\beta)+x(x-\alpha)]+y_0(y-\beta)-x_0(x-\alpha)=0$$

le lieu est un cercle passant par le point $\alpha\beta$.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Mansion, professeur de l'Université de Gand, à M. de Longchamps.

... Le dernier numéro du *Journal de Mathématiques spéciales* contient un article de M. Amigues sur la méthode de Bezout, à propos duquel il y a une observation sérieuse à faire.

Il dit (p. 104):

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \ldots\ f(\alpha)_p$$

sont racines de

$$B\beta + C\beta^2 + \ldots = 0. \qquad (1)$$

Cette équation, de degré p, au plus, a pour ses p racines

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2)\ \ldots\ f(\alpha_p);$$

dont l'une d'elles est égale à la racine $\beta = 0$ de (1).

Ce raisonnement n'est pas probant. Si deux des expressions $f(\alpha_1), \ldots f(\alpha_p)$ sont égales, par exemple $f(\alpha_k), f(\alpha_{k+1})$, rien ne prouve que l'équation (1) ait deux racines égales à $f(\alpha_k)$. On ne sait donc pas si (1) n'a pas pour racines $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_p)$, chacune une fois, et de plus $\beta = 0$.

Une difficulté semblable se rencontre aussidans le mode d'exposition de Falk, et aussi dans celui de Lemonnier, et vicie toutes les conclusions de ces deux auteurs.

QUESTIONS PROPOSÉES

123. — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$2a + b(\rho + \rho^{-1})x + c(\rho^{\sqrt{2}} + \rho^{-\sqrt{2}})x^2 + d(\rho^{\sqrt{3}} + \rho^{-\sqrt{3}})x^3 + \ldots + k(\rho^{\sqrt{n}} + \rho^{-\sqrt{n}})x^n = 0;$$

ρ désigne une quantité arbitraire. *(Laguerre.)*

Corriger comme il suit la question 123.

(Mathématiques spéciales.)

---

123. — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$2a + b(\rho + \rho^{-1})x + c\left(\rho^{\sqrt{2}} + \rho^{-\sqrt{2}}\right)x^2 + d\left(\rho^{\sqrt{3}} + \rho^{-\sqrt{3}}\right)x^3 + \ldots + k\left(\rho^{\sqrt{n}} + \rho^{-\sqrt{n}}\right)x^n = 0;$$

ρ désigne une quantité arbitraire.

(Laguerre.)

---

124. — On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène dans le plan de la courbe une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A et B. Au point A, on mène dans le plan de la parabole la normale AM à cette courbe ; puis, par AM, on fait passer des plans variables. Lieu des foyers des paraboles suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane. *(Amigues.)*

125. — Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy; trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine. — La courbe est du huitième degré ; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable

$$\frac{p}{\rho} = 1 - 4 \cos \omega.$$

Déduire de cette équation les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe. *(G. L.)*

126. — On considère un triangle ABC et une parabole. On mène à la parabole une tangente D, parallèle au côté BC, et du point A on mène à la parabole des tangentes qui rencontrent la droite D en A′ et A″. Opérant de même pour les deux autres côtés, on obtient six points A′, A″, B′, B″, C′, C″. Démontrer que ces six points sont sur une conique qui contient A, B et C. *(Weill.)*

127. — Un cercle passe par le foyer d'une parabole, et rencontre cette courbe au point A. En ce point, on mène la tangente à la parabole, laquelle rencontre le cercle au point B. Au point B, on mène la tangente au cercle. Démontrer que cette droite est tangente à la parabole. *(Weill.)*

128. — Étant donnés sept points dans un plan, on fait passer par cinq d'entre eux une conique, et l'on joint les deux autres par une droite qui rencontre la conique en deux points A_1 et A_2. Opérant ainsi sur tous les points successivement, on obtient quarante-deux points. Démontrer qu'il existe une courbe du sixième degré passant par ces quarante-deux points, et ayant les sept points donnés pour points doubles. Trouver son équation. *(Weill.)*

129. — Trouver toutes les équations du troisième degré telles que, si x_1 est une de leurs racines, convenablement choisie, les deux autres soient

$$-\frac{x_1 + 1}{x_1} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{1 + x_1}.$$

(Weill.)

130. — Trouver les équations du sixième degré telles que, si x_1 est une *quelconque* de leurs racines, les autres soient

$$\frac{1}{x_1}, \ -(1 + x_1), \ -\frac{1}{1 + x_1}, \ -\frac{x_1}{1 + x_1}, \ -\frac{x_1 + 1}{x_1}$$

(Weill.)

131. — On considère une ellipse E, et sur le grand axe AA′ quatre points fixes P, P′; Q, Q′; O étant le centre de E, on suppose

$$OP = OP' = d,$$
$$OQ = OQ' = d'.$$

Ceci posé, on prend sur E un point mobile M, et on joint M aux quatre points fixes. Ces droites rencontrent l'ellipse en des points C, C′; D, D′; les droites CD, C′D′, se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique.

Ce lieu est l'ensemble de deux coniques. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15034-4.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

APPLICATIONS NOUVELLES DES TRANSVERSALES RÉCIPROQUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 121.)

---

7. — L'application des transversales réciproques à la construction des tangentes nous a déjà occupé (*), et nous avons montré comment on obtenait, par un procédé des plus simples, le tracé des tangentes aux courbes que nous avons nommées *courbes conchoïdales* et *courbes diamétrales*. Mais nous voulons revenir ici sur cette construction, pour l'étendre à des courbes plus générales que celles que nous avons considérées dans les articles cités.

Nous rappellerons d'abord la définition de ces courbes.

8. — Imaginons une courbe V que nous voulons transformer au moyen d'une autre courbe U formant la figure de référence, et considérons une tangente à V rencontrant U au point A; si nous prenons

$$AM' = AM'' = h,$$

(h désignant une longueur donnée), le lieu du point M', ou du point M'', est une certaine courbe V' que nous nommons une *conchoïdale*, par rapport à U.

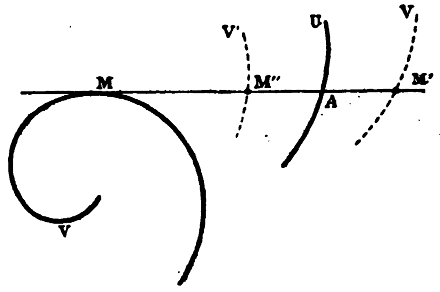


Fig. 7.

Considérons maintenant une figure de référence formée

(*) *Journal*, année 1880, p. 272; et *Journal de Math. spéc.*, année 1882, p. 25.

par deux courbes U_1, U_2; si nous menons à la courbe V une tangente quelconque rencontrant U_1 au point A_1, U_2 au point A_2, le lieu décrit par le milieu de $A_1 A_2$ est une certaine courbe V' que nous appellerons *courbe diamétrale*.

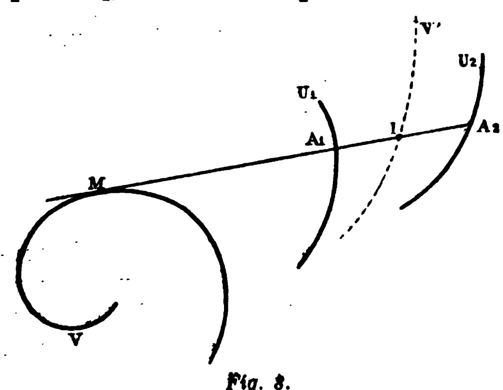


Fig. 8.

Dans le cas particulier où V se réduit à un point, les conchoïdales deviennent des conchoïdes ordinaires et si, dans la figure 8, on suppose que V représente un point rejeté à l'infini et que les courbes U_1 et U_2 forment une seule et même courbe, on retombe dans les courbes diamétrales, qui sont ordinairement considérées.

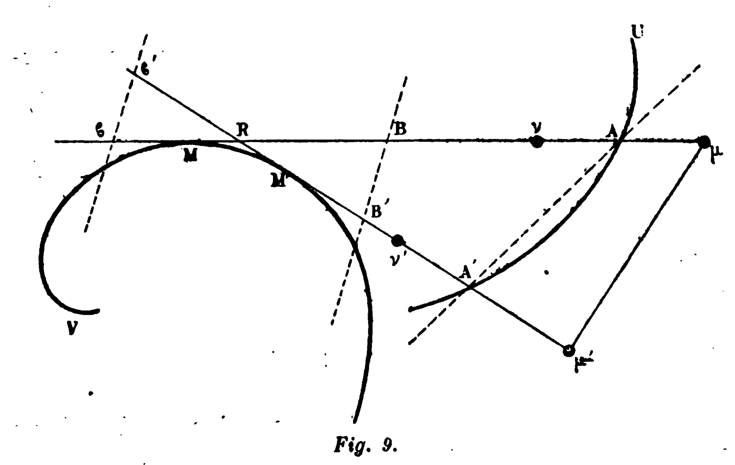


Fig. 9.

Nous avons supposé, dans les articles que nous avons rappelés, que la courbe V se réduisait à un point; nous allons maintenant traiter un cas plus général, V étant une courbe quelconque.

9. — Examinons d'abord le cas des conchoïdales, courbes définies comme nous venons de le dire, et considérons deux tangentes voisines MA, M'A'. Si nous prenons $A\mu = A'\mu' = h$, les points μ et μ' seront deux points voisins de la conchoïdale, et nous nous proposons de chercher la position limite de $\mu\mu'$.

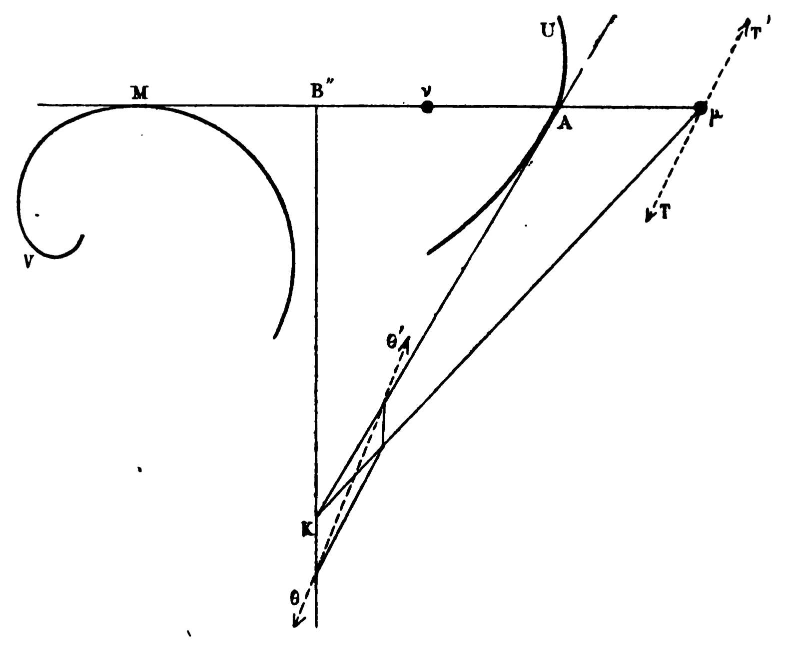


Fig. 10.

A cet effet, prenons

$$RB = RB' = h,$$

les deux droites AA', BB' sont deux transversales réciproques du triangle R $\mu\mu'$; elles rencontrent donc $\mu\mu'$ en deux points symétriquement placés par rapport au milieu de $\mu\mu'$.

Si maintenant nous passons à la limite, si nous supposons que le point M' vienne se confondre avec M, BB' a pour position limite une droite B''K, perpendiculaire à MA, en un point B'', choisi de telle sorte que l'on ait $MB'' = A\mu = h$. La droite AA' devient la tangente AK à la courbe U, au point

A, et la tangente à la conchoïdale est donc une droite passant par μ et partagée en deux parties égales par les droites AK, B″K. La figure 11 montre la construction qu'il faut faire pour trouver la tangente TT′; la droite TT′ est parallèle à $\theta\theta'$, diagonale du parallélogramme obtenu comme l'indique la figure.

Si l'on considère le second bras de la conchoïdale, celui que l'on obtient en prenant

$$\nu A = \nu' A' = h,$$

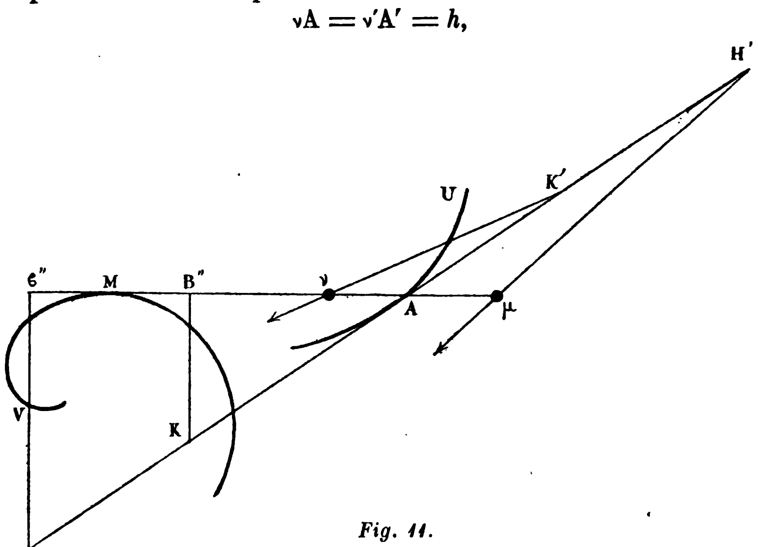


Fig. 11.

on voit que BB′ et $\nu\nu'$ sont deux transversales réciproques du triangle RAA′; elles rencontrent donc AA′ en deux points symétriques par rapport au milieu de AA′, et pour obtenir *(fig. 11)* la tangente au point ν, il suffit de joindre ν au point symétrique de K par rapport à A.

10. — Cette dernière construction est même un peu plus simple que celle que nous avons indiquée pour la première branche de la conchoïdale; mais on peut l'appliquer à cette même branche en considérant *(fig. 9)* la droite $\beta\beta'$ obtenue en prenant

$$\beta R = \beta' R = h.$$

Les droites $\mu\mu'$, $\beta\beta'$ sont deux transversales réciproques du triangle RAA'; elles rencontrent donc AA' en deux points symétriques par rapport au milieu de AA'.

En passant à la limite on obtient les tangentes aux points μ et ν, comme le montre la figure 11; dans cette figure on a pris

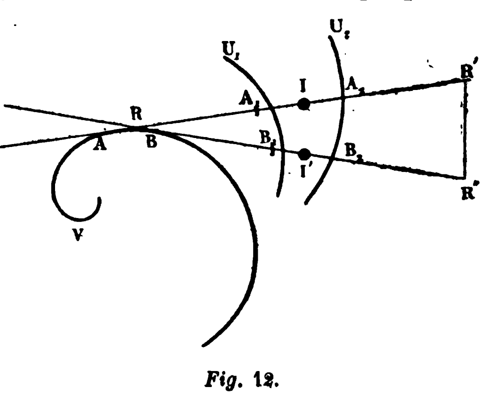


Fig. 12.

$$AK' = AK, \text{et } AH' = AH.$$

11. — Considérons maintenant une courbe diamétrale, et après avoir construit, comme l'indique la figure 12, deux

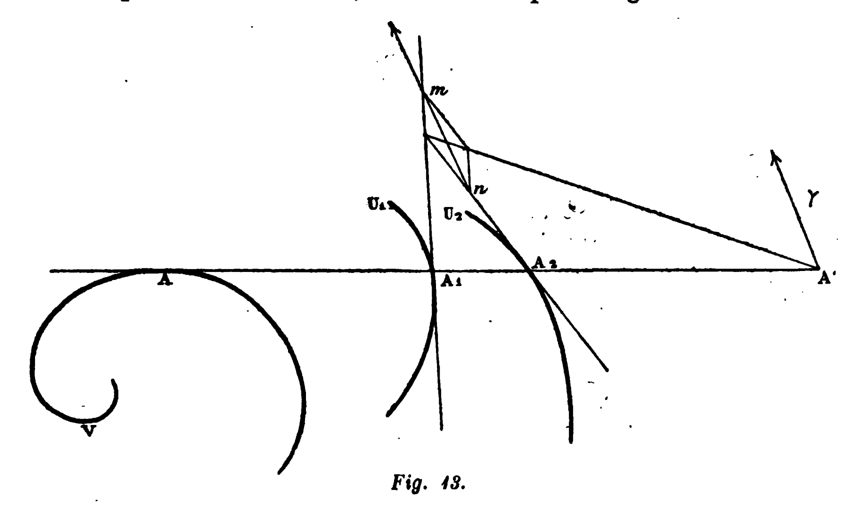


Fig. 13.

points I, I' de la diamétrale, prenons

$$IR' = RI, \text{ et } I'R'' = RI'.$$

Les droites A_1B_1, A_2B_2 sont deux transversales réciproques

du triangle RR'R", elles coupent R'R" en deux points équidistants du milieu de R'R'.

Si nous passons à la limite, nous obtiendrons la position limite de R'R" et, par suite, la direction de la tangente au point A' en effectuant la construction indiquée par la figure 13.

Dans cette figure on a pris $A_2A' = AA_1$, et la droite γ, position limite de R'R', est une parallèle à la diagonale *mn* du parallélogramme construit comme l'indique la figure.

12. — La construction de la tangente aux conchoïdales présente une difficulté particulière dans un cas que nous allons envisager. Ce n'est pas là d'ailleurs un fait isolé; et les exemples sont nombreux, aussi bien dans l'analyse que dans la géométrie, exemples dans lesquels la solution du cas général cesse d'être valable, même avec les modifications qu'on y peut faire, dans certains cas singuliers.

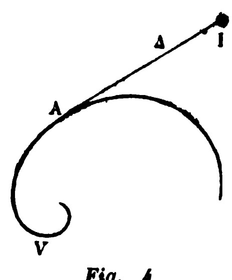


Fig. 4

Tel est, dans le problème qui nous occupe, le cas où l'on suppose que les courbes U et V (*fig. 10*) se confondent. Nous sommes amenés ainsi à considérer une conchoïdale particulière et qui correspond à la définition suivante : *On considère une courbe* V *et un point* A, *mobile sur cette courbe; en ce point* A, *on mène une tangente* Δ *sur laquelle on prend, à partir du point* A, *un longueur* AI, *constante et égale à* h; *trouver le lieu décrit par ce point* I.

La construction que nous avons donnée plus haut, construction très simple, mais qui repose sur le tracé des tangentes aux courbes U et V (*fig. 10*), cesse d'être applicable quand on se place dans l'hypothèse particulière que nous examinons. Nous indiquons, dans le paragraphe suivant, une solution de la difficulté que nous venons de soulever.

13. — Considérons deux tangentes voisines à la courbe V, et prenons

$$AI = A'I' = h.$$

Nous allons chercher la limite des positions de II′, quand les points A, A′ viennent se confondre.

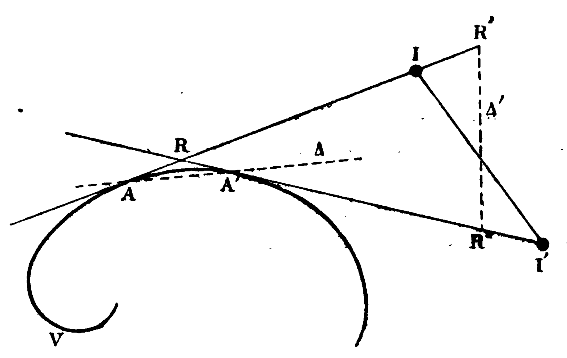


Fig. 15.

A cet effet, prenons

$$IR' = AR, \text{ et } R''I' = RA';$$

nous avons alors

$$RR' = RR'' = h,$$

et nous pouvons aussi remarquer que Δ et Δ′ sont deux transversales réciproques du triangle RII′.

Ceci posé, imaginons la parabole P qui est inscrite au triangle RII′ et qui est tangente à Δ ; les diamètres de cette parabole seront parallèles à R′R″ (§ 2). Nous savons d'ailleurs que le foyer de P appartient aux cercles circonscrits des triangles formés par le quadrilatère (RII′, Δ) Passons maintenant à la limite ; le cercle circonscrit au triangle ARA′ (l'un de ceux auxquels nous venons de faire allusion) a pour position limite le cercle décrit sur

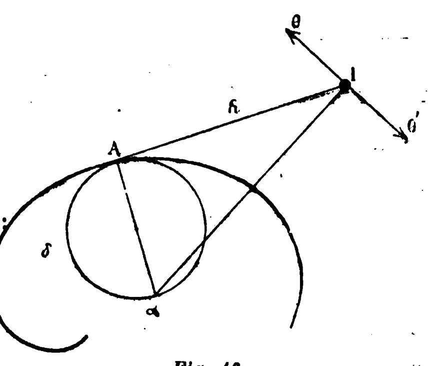


Fig. 16.

la droite qui joint le point A au centre de courbure de V en ce point, comme diamètre.

Soit α le centre de courbure de V au point A; sur $A\alpha$ comme diamètre décrivons un cercle δ; le triangle $RR'R''$ étant isoscèle, la droite $R'R''$, à la limite, est perpendiculaire à la tangente AI. On conclut de là que la direction des diamètres de la parabole P à la limite, est la normale $A\alpha$. Cette droite $A\alpha$ est donc l'axe de cette parabole limite P', et α est précisément son foyer. En joignant $I\alpha$ et en élevant une perpendiculaire $\theta\theta'$ à cette droite, une propriété connue montre que $\theta\theta'$ est la limite de II'; c'est la tangente cherchée.

14. — Nous bornerons là ces considérations sur les transversales réciproques; mais ces droites, en raison même de la simplicité de la loi qui règle leur construction, se rencontrent dans un grand nombre de questions, et nous aurons occasion de montrer une application nouvelle de ces transversales dans une étude que nous publierons prochainement sur l'hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Nous ferons pourtant une dernière remarque relative aux conchoïdales.

15. — Reportons-nous à la figure 11 et considérons les deux points μ et ν de la conchoïdale, points qu'on peut appeler *correspondants sur la conchoïdale.*

Puisque nous avons

$$K'A = AK, \quad H'A = AH,$$

nous avons aussi

$$K'H' = KH.$$

Remarquons encore que la projection de HK sur $\mu\nu$ est la droite $B''\beta''$, c'est-à-dire $2h$. Nous pouvons donc, d'après cela, énoncer la propriété suivante :

Théorème. — *Si l'on considère deux points correspondants μ, ν, d'une conchoïdale, les tangentes à cette courbe, en ces points, rencontrent la tangente à la courbe de référence U, au point A milieu de $\mu\nu$, en deux points, qui, projetés sur $\mu\nu$, donnent un segment constant et égal à $\mu\nu$.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884

Mathématiques spéciales.

Par le centre d'un ellipsoïde donné, on mène trois diamètres conjugués quelconques, et, par les points où ces droites rencontrent la sphère circonscrite au parallélépipède formé par les plans tangents aux sommets de l'ellipsoïde, on fait passer des plans.

1. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P *sur ces plans variables.*

2. Ce lieu est une surface du quatrième ordre, dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8cx + 8c'y + 8c''z + 4D = 0.$$

Trouver toutes les sphères telles que chacune d'elles coupe la sphère suivant deux cercles.

3. Ces sphères forment cinq séries, parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes.

Démontrer que les sphères de la série double *passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres.*

Démontrer que les sphères des trois autres séries coupent respectivement à angle droit les sphères fixes S_1, S_2, S_3.

4. Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

Solution par M. Fontené, professeur de Mathématiques Élémentaires au Collège Rollin.

PREMIÈRE PARTIE

La surface du quatrième degré qui figure dans la question est une anallagmatique du quatrième ordre dans un cas particulier, et pourrait donner lieu à des développements assez longs. Je me bornerai à traiter la question telle qu'elle est posée.

Soit l'ellipsoïde et la sphère de Monge

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Soit un des plans de l'énoncé

$$P = l\frac{x}{a} + m\frac{y}{b} + n\frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Pour obtenir la relation entre l, m, n je fais une transformation homographique, en faisant correspondre au point xyz le point XYZ donné par les relations

$$\frac{x}{a} = X, \quad \frac{y}{b} = Y, \quad \frac{z}{c} = Z.$$

J'obtiens alors

$$E' = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$$
$$S' = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$
$$P' = lX + mY + nZ - 1 = 0.$$

Comme la transformation effectuée conserve les diamètres conjugués, ce plan doit couper la surface S′ suivant une conique où aboutissent trois diamètres conjugués de la sphère E′; c'est-à-dire que le cône qui a son sommet à l'origine, et pour directrice la courbe (S′P′) doit être capable de trois génératrices rectangulaires. On a facilement la condition

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

qui lie les paramètres du plan P.

Cela posé, si l'on appelle 2α, 2β, 2γ, les coordonnées du point donné I, on aura le lieu en éliminant l, m, n, entre l'équation du plan P, la condition ci-dessus, et les équations de la perpendiculaire

$$\frac{x - 2\alpha}{\frac{l}{a}} = \frac{y - 2\beta}{\frac{m}{b}} = \frac{z - 2\gamma}{\frac{n}{c}}.$$

Pour faire l'élimination on fait une combinaison homogène en l, m, n, de l'équation du plan P et de l'équation de condition, et on remplace l, m, n par $a(x - 2\alpha)$, etc.; ce qui donne l'équation du lieu :

$$[x(x - 2\alpha) + y(y - 2\beta) + z(z - 2\gamma)]^2 - a^2(x - 2\alpha)^2$$
$$- b^2(y - 2\beta)^2 - c^2(z - 2\gamma)^2 = 0.$$

Si on transporte l'origine au point O′ milieu de OI, l'équation devient, en posant $OI = 2\delta$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \delta^2)^2 - a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2$$
$$- c^2(z - \gamma)^2 = 0$$

avec

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

REMARQUE. — La condition $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ montre que le plan P est tangent à l'ellipsoïde au point

$$\frac{x}{a} = l, \quad \frac{y}{b} = m, \quad \frac{z}{c} = n.$$

Donc la surface est la polaire du point I. Le point I est un point double.

DEUXIÈME PARTIE

Si on remarque que cette équation contient le carré du premier membre de l'équation d'une sphère, le premier membre de l'équation d'un cône, il est facile d'obtenir une première série de sphères coupant la surface suivant deux cercles. En effet, soit la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - \delta^2 - 2\lambda(x - \alpha) - 2\mu(y - \beta) - 2\nu(z - \gamma) = 0.$$

Elle coupe la surface suivant une courbe située sur la surface du second degré

$$4[\lambda(x - \alpha) + \mu(y - \beta) + \nu(z - \gamma)]^2 - a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2 - c^2(z - \gamma)^2 = 0;$$

cette surface est un cône. Si ce cône se réduit à deux phases, la section par la sphère se composera de deux cercles. Or, on trouve facilement la condition

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{a^2}{4\lambda^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \dfrac{b^2}{4\mu^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \dfrac{c^2}{4\nu^2} \end{vmatrix} = 0$$

qui devient

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} = \frac{1}{4}.$$

Or, les sphères considérées passent au point α, β, γ, c'est-à-dire au point I, et le lieu de leurs centres (λ, μ, ν) est la surface du second degré ci-dessus ; elle est homothétique à l'ellipsoïde donné, le centre d'homothétie étant I, et le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$. Si donc M est un point de l'el-

lipsoïde primitif, la sphère décrite sur IM comme diamètre est une des sphères considérées ici.

Remarque. — Ce résultat est facile à prévoir. La surface est la polaire du point I, par suite elle est l'enveloppe des sphères qui ont pour diamètre IM, M' étant un point de l'ellipsoïde ; ces sphères, passant au point double I, et touchant la surface, peuvent être considérées comme bitangentes à la surface, et par suite la coupent suivant deux cercles (théorème connu).

TROISIÈME PARTIE

Pour trouver d'autres sphères coupant la surface suivant deux cercles, j'introduis un paramètre θ dans son équation, et je l'écris

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\delta^2-\theta)^2-(a^2-2\theta)x^2-(b^2-2\theta)y^2-(c^2-2\theta)z^2 \\ +2a^2\alpha x+2b^2\beta y+2c^2\gamma z \\ -a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2-2\delta^2\theta-\theta^2=0.\end{aligned}$$

Je dispose de θ de façon que la surface du second degré qui figure dans l'équation soit un cône, ce qui me donne

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2-\delta^2-\theta)^2-(a^2-2\theta)\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta}\right)^2 \\ -(b^2-2\theta)\left(y-\frac{b^2\beta}{b^2-2\theta}\right)^2 \\ -(c^2-2\theta)\left(z-\frac{c^2\gamma}{c^2-2\theta}\right)^2=0\end{aligned}$$

avec la condition

$$\begin{aligned}\frac{a^4\alpha^2}{a^2-2\theta}+\frac{b^4\beta^2}{b^2-2\theta}+\frac{c^4\gamma^2}{c^2-2\theta}-a^2\alpha^2-b^2\beta^2-c^2\gamma^2 \\ -2\delta^2\theta-\theta^2=0, \qquad (1)\end{aligned}$$

équation du cinquième degré.

Cette équation devient facilement

$$\theta^2\left[\frac{\alpha^2}{a^2-2\theta}+\frac{\beta^2}{b^2-2\theta}+\frac{\gamma^2}{c^2-2\theta}-1\right]=0.$$

Elle admet la racine double $\theta=0$, et trois autres racines réelles séparées par

$$-\infty,\ \frac{a^2}{2},\ \frac{b^2}{2},\ \frac{c^2}{2}.$$

Cela posé, et θ étant racine de l'équation précédente, coupons la surface par la sphère

$$(x^2+y^2+z^2-\delta^2-\theta)-2\lambda\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta}\right)-2\mu(\quad)$$
$$-2\nu(\quad)=0. \qquad (2)$$

La courbe d'intersection est sur la surface du second degré

$$\left[2\lambda\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta}\right)+\ldots\right]^2-(a^2-2\theta)\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta}\right)^2$$
$$-\ldots=0,$$

qui est un cône. Si ce cône se réduit à deux plans, la section par la sphère se composera de deux cercles. Or on trouve facilement la condition

$$\frac{\lambda^2}{a^2-2\theta}+\frac{\mu^2}{b^2-2\theta}+\frac{\nu^2}{c^2-2\theta}=\frac{1}{4}.$$

Donc, θ étant racine de l'équation (1), et λ, μ, ν vérifiant la relation (3), la sphère (2) coupe la surface suivant deux cercles. Le centre étant λ, μ, ν, le lieu du centre est la surface (3); on a ainsi, pour les quatre racines θ_0, θ_1, θ_2, θ_3, quatre surfaces homofocales. En outre si on prend par rapport aux sphères (2) la puissance du point dont les coordonnées sont

$$U=\frac{a^2\alpha}{a^2-2\theta},\ V=\frac{b^2\beta}{b^2-2\theta},\ W=\frac{c^2\gamma}{c^2-2\theta},$$

la puissance est indépendante de λ, μ, ν, et les sphères de chaque série sont orthogonales à une sphère ayant ce point pour centre, et pour carré de son rayon la puissance, c'est-à-dire

$$u^2+v^2+w^2-\delta^2-\theta.$$

En particulier, si on prend la racine double $\theta=0$ le centre est

$$u=\alpha,\quad v=\beta,\quad w=\gamma$$

et le carré du rayon est nul : la sphère se réduit au point I.

On reconnaît là la génération des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

REMARQUE I. — Soient A, B, C les centres des trois sphères orthogonales. D'après la théorie générale des surfaces anal-

lagmatiques du quatrième ordre, le trièdre IA, IB, IC est trirectangle, et le carré du rayon de la sphère de centre A est $\overline{AI}^2$.

L'orthogonalité des directions IA, IB, revient à

$$\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2) = 0,$$

$\varphi(\theta)$ étant l'équation en θ.

Quant au carré du rayon, la vérification conduit à l'équation en θ mise sous la forme

$$\frac{2a^2\alpha^2}{a^2 - 2\theta} + \ldots - 2\delta^2 - \theta = 0,$$

où elle est débarrassée seulement d'une racine nulle.

REMARQUE II. — L'équation en θ, où on introduit u, v, w, donne pour l'équation du plan ABC

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0;$$

c'est le plan polaire du point I par rapport à l'ellipsoïde dont le centre est transporté en O′ milieu de OI.

NOTA. — Nous avons reçu également une solution très élégante de M. Voignier, élève du Lycée de Nancy.

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1884

Mathématiques.

On donne une conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

On joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F′.

1. On demande d'exprimer les coordonnées du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF′, au moyen des coordonnées du point M.

2. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M′ de la

conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

3. Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P. On déterminera, en coordonnées polaires, l'équation du lieu décrit par le point P. On prendra le foyer F pour origine des rayons. et l'axe des X pour origine des angles.

Lavis.

Deux troncs de cône égaux, dont les axes sont verticaux, sont raccordés entre eux par une portion de sphère. L'angle au sommet de chaque cône est de 90°; l'ensemble des trois corps a 144 millimètres de hauteur. Exécuter à teintes plates, à l'encre de chine, le lavis du solide ainsi constitué; les deux faces sont dépolies; le rayon lumineux est dirigé à 45°, suivant l'usage.

Trigonométrie.

On donne les trois côtés d'un triangle

$$a = 12514^{m},87,$$
$$b = 22636,55,$$
$$c = 18915,92.$$

Déterminer les trois angles et la surface en hectares.

Géométrie descriptive.

Représenter, par ses projections, le solide commun à un cône et à un cylindre pleins, tous deux de révolution.

Les axes sont de front, et se coupent à angle droit audessus du plan horizontal, leur plan est à 10 centimètres en avant du plan vertical.

Le cône est tangent au plan horizontal; son demi-angle au sommet est le quart d'un angle droit.

Le cylindre a 5 centimètres de rayon; son axe rencontre le plan horizontal à 16 centimètres du sommet du cône.

On prendra la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre, et à égale distance des deux autres côtés.

CONCOURS DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
EN 1884

Mathématiques.

a et b désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est pour chaque position de ce point la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0\,?$$

On construira, en particulier, le lieu des positions point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

Physique.

1. — Un fil métallique est tendu par un barreau de cuivre horizontal que l'on fait osciller, et la durée de l'oscillation est θ. Le fil est en équilibre quand le barreau est perpendiculaire au méridien magnétique ; on remplace le barreau de cuivre par un barreau aimanté, qui se met alors dans une position faisant un angle α avec la première. On fait osciller le barreau aimanté autour de cette position d'équilibre, et on trouve que la durée de l'oscillation est t. Quelle est l'équation qui lie les trois variables θ, t et α?

2. — Une lunette dont l'objectif a une longueur focale égale à F est pourvue d'un oculaire négatif à deux verres, dont le symbole est 1, 2, 3; c'est-à-dire que le verre oculaire, celui qui est tourné vers l'œil, a un foyer f; le verre de champ, c'est-à-dire celui qui est tourné vers l'objectif, a un foyer $3f$, et la distance des verres est égale à $2f$. La lunette est réglée pour un objet infiniment éloigné, et pour un œil infiniment presbyte. On demande : 1° la mise au point, c'est-à-dire la distance de la lentille de champ par rapport au plan focal de l'objectif; 2° le grossissement; 3° la position du cercle

de Ramsden, ou sa distance à la lentille oculaire; 4° la grandeur de ce cercle, ou le rapport de son diamètre à celui de l'objectif.

3. — Que savez-vous sur les grandeurs électriques, et sur les unités qui servent à les mesurer?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1884

Questions d'examens oraux

1. — Quel est le degré de la courbe qui correspond à l'équation polaire

$$\rho^m(A \cos m\omega + B \sin m\omega) = 1 \text{ ; } (m \text{ entier}).$$

Déterminer les asymptotes.

Comment peut-on, par un changement d'axes, ramener l'équation précédente à la forme

$$\frac{1}{r^m} = h \sin m\Omega.$$

2. — Démontrer que l'origine est un sommet de la surface qui a pour équation

$$xy + xz + yz + x + y + z = 0.$$

3. — Résoudre les inégalités

$$ax + by + c > 0,$$
$$a'x + b'y + c' > 0.$$

4. — Construire les courbes qui correspondent aux équations

$$\rho^2 = \sin 2\omega, \quad \rho^3 = \sin 3\omega, \quad \rho^4 = \sin 4\omega, \quad \text{etc.}$$

5. — Construire la courbe qui a pour équation

$$(y - xy - x^2)^2 = x^3;$$

comparer cette courbe avec celle qui correspond aux formules

$$x = t^2, \quad y = \frac{t^3}{1 - t};$$

au moyen de cette dernière formule déterminer la tangente qui est parallèle à la tangente de rebroussement.

6. — Calculer les axes d'une section plane dans un paraboloïde.

7. — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m est une expression imaginaire dont le module croît au delà de toute limite.

8. — Que représente, dans un plan donné, l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

f étant une forme quadratique homogène des lettres x, y, z; que représente aussi

$$f(P, Q, R) = 0,$$

P, Q, R étant des formes linéaires et homogènes des lettres x, y, z.

9. — On considère l'équation

$$f(x) = 0.$$

Soit a une quelconque de ses racines, démontrer que l'on a

$$\Sigma \frac{1}{1 + a} = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

10. — Construire la courbe

$$\rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin 2\omega},$$

montrer que cette équation représente une cubique passant par les ombilics du plan; déterminer son asymptote $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ qui est inflexionnelle.

11. — On considère deux coniques Γ, Γ' se coupant aux points A, B, C, D; on suppose que les tangentes en A coupent CD en deux points qui forment avec C et D une division harmonique; démontrer que cette propriété a lieu pour le point B, c'est-à-dire que les tangentes en ce point à Γ et à Γ' rencontrent aussi CD en deux points qui forment avec C et D une division harmonique.

12. — On considère des variables indépendantes x, y, z, vérifiant constamment l'égalité

$$x + y + z = a;$$

démontrer que le maximum de

$$xy + yz + zx,$$

a lieu quand on suppose

$$x = y = z = \frac{a}{3}.$$

Généraliser cette proposition en l'étendant à p variables.

13. — Équation générale des tangentes parallèles à une direction donnée; la déduire de l'équation quadratique des tangentes issues d'un point donné, en supposant que celui-ci s'éloigne à l'infini dans la direction proposée.

Appliquer cette même idée à la recherche de l'équation du cylindre circonscrit aux quadriques.

14. — Que représente l'équation

$$\rho = \frac{\sin 2\omega}{\cos \omega}?$$

15. — Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = \frac{\sin 3\omega}{\cos \omega};$$

déterminer en particulier le point de cette courbe pour lequel ρ est maximum.

16. — Une conique Γ passe par l'origine tangentiellement à Oy, trouver l'équation générale des coniques qui passent par O et qui sont osculatrices à Γ; c'est-à-dire qui ont, avec Γ, quatre points communs confondus à l'origine.

QUESTION 57

Solution par M. Jérome Callé, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre qui ont pour asymptotes trois droites données, et l'enveloppe des tangentes de rebroussement. (J. Kœhler.)

1° Prenons pour origine de coordonnées le centre du triangle, et pour axes une médiane et la parallèle au troisième côté. Soit $3d$ la longueur de la médiane.

L'équation générale d'une cubique admettant les droites $y - m(x + 2d) = 0$, $y + m(x + 2d) = 0$, $x - d = 0$ pour asymptotes, est

$$[y^2 - m^2(x + 2d)^2](x - d) + Ax + By + C = 0.$$

Transportons les axes en un point $(\alpha.\beta)$. Nous obtenons

$$[(y + \beta)^2 - m^2(x + \alpha + 2d)^2](x + \alpha - d) + Ax + By + A\alpha + B\beta + c = 0.$$

Les courbes étant du troisième ordre, pour exprimer que le point $(\alpha.\beta)$ est un point de rebroussement, il faut exprimer, et cela suffit, que le point $(\alpha.\beta)$ est un point double, et que les tangentes à la courbe en ce point se confondent.

Si $(\alpha.\beta)$ est un point double, les coefficients angulaires des tangentes en ce point sont données par l'équation

$$t^2(\alpha - d) + 2\beta t - 3\,m^2(\alpha + d) = 0. \qquad (1)$$

Le point sera de rebroussement, si

$$\beta^2 + 3m^2(\alpha^2 - d^2) = 0. \qquad (2)$$

Cette équation, étant indépendante des paramètres variables A, B, C, représente le lieu demandé. — On voit que c'est une ellipse tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.

2° La tangente de rebroussement a pour équation

$$y - \beta = -\frac{\beta}{\alpha - d}(x - \alpha).$$

Posons

$$-\frac{\beta}{\alpha - d} = t.$$

Cette relation et la relation (2) nous donnent

$$\alpha = \frac{a(t^2 - 3m^2)}{3m^2 + t^2}\,; \quad \beta = \frac{6am^2t}{3m^2 + t^2}.$$

L'équation de la tangente est donc

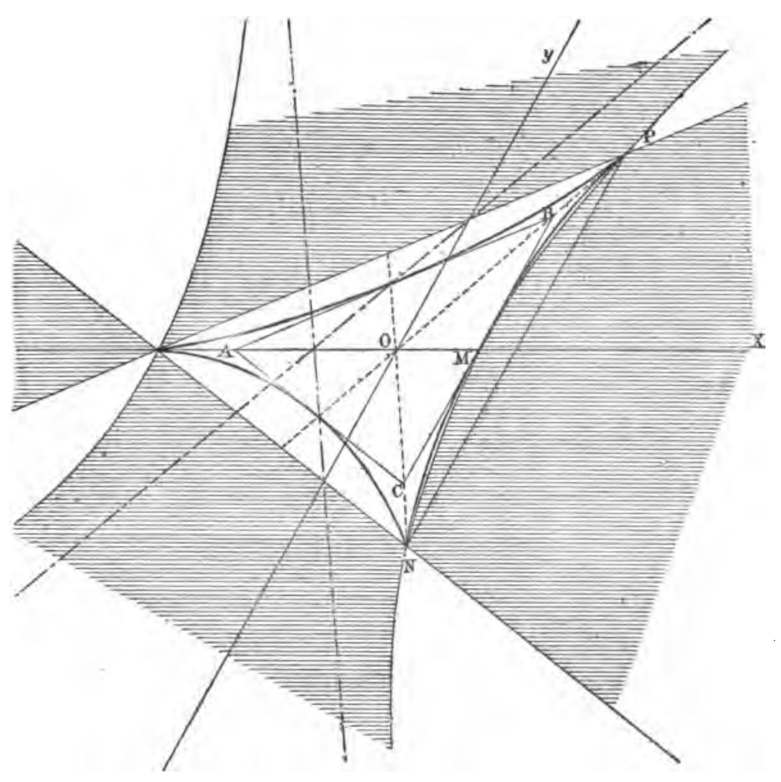
$$y(3m^2 + t^2) - 6am^2t = t[x(3m^2 + t^2) - a(t^2 - 3m^2)].$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, il suffit d'exprimer que cette équation admet une racine double pour t. Si nous appliquons la formule

$$(BB' - 9AA')^2 = 4(B^2 - 3AB')(B'^2 - 3A'B),$$

qui exprime que l'équation $Ax^3 + Bx^2 + B'x + A' = 0$ a une racine double, nous trouvons pour l'enveloppe démandée

$$4m^2y^2(2x - 3d)^2 = [y^2 - 9m^2(x - d)(x + 3d)][m^2(x + 3d)^2 - y^2]. \quad (3)$$



La courbe n'admet pas d'asymptotes, car les directions asymptotiques sont données par l'équation $(t^2 + 3m^2)^2 = 0$.

Nous pouvons séparer en régions par une hyperbole et deux droites *(voir la fig.)*; on en déduit par raison de symétrie deux autres séparations par une hyperbole et deux droites. On voit alors qu'il n'y a pas de points de la courbe en dehors du triangle formé par des arcs d'hyperbole tels que PMN; N est un point de rebroussement; on en conclut que les deux autres sommets du triangle formé par les droites $y = \pm m(x + 3d)$

et $x = \frac{3a}{2}$, sont aussi des points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les médianes du triangle. — La courbe est d'ailleurs tangente aux côtés du triangle donné en leurs milieux.

CAS PARTICULIERS. — Soit $2a$ la longueur du côté BC ; nous aurons $3md = a$.

Remplaçons m par sa valeur en fonction de d et de a et transportons les axes de coordonnées au point $x = d$. L'équation (1) devient

$$3d^2y^2 + a^2x(x + d) = 0,$$

et l'équation (3)

$$4a^2dy^2(2x - d)^2 = [d^2y^2 - a^2x(x + 4d)][a^2(x + 4d)^2 - 9d^2y^2]$$

Pour $d = 0$, la première équation se réduit à $x^2 = 0$,

La deuxième à $x^4 = 0$,

Pour $d = \infty$, on a pour le lieu des points de rebroussement : $y^2 = 0$

Et pour l'enveloppe : $y^2 = 0$, et $y = \pm \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

132. — On considère des paraboles P qui sont tangentes à l'origine à l'axe Ox, et dont les directrices enveloppent la parabole fixe qui correspond à l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

(axes rectangulaires).

Démontrer : 1° que l'équation générale des paraboles P est

$$(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0,$$

λ désignant un paramètre variable;

2° Que l'enveloppe de ces paraboles a pour équation

$$2x^3 = 27py^2,$$

3° Que le lieu des foyers est une cissoïde ;

4° On propose enfin de trouver l'enveloppe des axes des paraboles P.

Ce lieu est l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(G. L.)

133. — Soit ABC un triangle; A'B'C' le triangle formé par les trois tangentes en A, B, C au cercle circonscrit; O le centre du cercle inscrit; A_1, B_1, C_1 les pieds des bissectrices intérieures;

A_2 le point où la perpendiculaire à OA menée par O coupe BC
B_2 — — OB — — AC
C_2 — — OC — — AB

Appelons H_a la conique qui passe par les cinq points A', B_1, B_2, C_1, C_2
— H_b — — — B', C_1, C_2, A_1, A_2
— H_c — — — C', A_1, A_2, B_1, B_2.

Ces coniques sont toujours des hyperboles; elles ont deux à deux une direction asymptotique commune parallèle à l'un des côtés du triangle A'B'C'.

En dehors des points communs qui les déterminent, et du point situé à l'infini,

H_b et H_c se coupent en A_3,
H_c et H_a — B_3,
H_a et H_b — C_3.

Démontrer que les parallèles à B'C', A'C', A'B' menées respectivement par A_3, B_3, C_3 se coupent en un même point.

Énoncer les théorèmes analogues obtenus en remplaçant O par O_a, centre du cercle ex-inscrit *(Em. Lemoine.)*

134. — Soit un point O du plan du triangle ABC

L'antiparallèle à BC menée par O coupe BC en 1_1, AC en 1_2, AB en 1_3.

L'antiparallèle à CA menée par O coupe BC en 2_1, AC en 2_2, AB en 2_3.

L'antiparallèle à AB menée par O coupe BC en 3_1, AC en 3_2, AB en 3_3.

Le lieu des points O pour lesquels 1_1, 2_2, 3_3 sont en ligne droite, ou, ce qui est la même chose, pour lesquels l'hexagone $1_3 3_1 2_1 1_2 3_2 2_3$ est inscriptible à une conique, est l'hyperbole équilatère circonscrite à ABC

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)\cos A}{\alpha} + \frac{b^2(c^2 - a^2)\cos B}{\beta} + \frac{c^2(a^2 - b^2)\cos C}{\gamma} = 0$$

(Examiner le cas du triangle rectangle, du triangle isoscèle.) Parmi ces points trouver celui pour lequel 3_2, 1_3, 2_1 sont en ligne droite ainsi que 1_2, 2_3, 3_1.

Les lieux des points pour lesquels *respectivement* 1_1, 2_3, 3_2, 2_2, 1_3, 3_1 sont en ligne droite sont les coniques

$$\frac{(c^2 - b^2)\cos A}{\alpha} - \frac{bc \cos C}{\beta} + \frac{bc \cos B}{\gamma} = 0,$$

$$\frac{ac \cos C}{\alpha} - \frac{(c^2 - a^2)\cos B}{\beta} - \frac{ac \cos A}{\gamma} = 0,$$

qui se coupent en un point pour lequel 1_2, 2_1, 3_3 sont aussi en ligne droite. *(Ém. Lemoine.)*

135. — Si l'on joint un point M quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités A et A′ d'un diamètre, les cordes conjuguées à ce diamètre sont des antiparallèles de AA′ dans le triangle AMA′. *(Ém. Lemoine.)*

136. — Enveloppe des coniques qui ont un diamètre AA′ = $2a$ donné en grandeur et en position, et le conjugué donné en grandeur seulement. *(Ém. Lemoine.)*

137. — Au moyen de l'hexagramme de Pascal, construire le sommet d'une hyperbole, connaissant l'axe transverse, deux points et la direction d'une asymptote.

(Ém. Lemoine.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 17348-4.

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

Par M. G. de Longchamps.

1. — Parmi les courbes célèbres, qui méritent ce nom par les travaux divers qu'elles ont provoqués et par les propriétés remarquables dont elles jouissent, on peut placer, au premier rang, l'hypocycloïde à trois rebroussements.

On sait que cette courbe peut être engendrée comme une roulette par un cercle roulant à l'intérieur d'un autre cercle de rayon triple; ou, encore, ayant un rayon égal aux 3/2 de celui du premier.

Elle paraît avoir été découverte par *Euler* (1). Depuis, *Steiner* (2) a donné des théorèmes intéressants sur la forme de la courbe et la longueur de ses arcs; il a également fait connaître la quadrature de son aire. M. *Schröter* (3) et après lui M. *Cremona* (4) ont repris l'étude de cette courbe que ce dernier a si justement nommée, pour exprimer l'abondance et la simplicité de ses propriétés, *la courbe merveilleuse*. Plus récemment, M. *Painvin* (5) a présenté une étude analytique de cette courbe sur laquelle M. *Laguerre* (6) a fait connaître vers la même époque quelques propriétés intéressantes et qui n'avaient pas encore été vues. Enfin, nous devons signaler ici ce fait que l'hypocycloïde à trois rebroussements fait partie de la famille que M. *de la Gournerie* (7)

(1) Euler. De duplici genesi epicycloïdum quam hypocycloïdum (année 1781) — Actes de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.

(2) Steiner. *Journal de Crelle* (t. LIII, p. 231).

(3) Schröter. *Journal de Crelle* (t. LIV, p. 31).

(4) Cremona. *Journal de Crelle* (années 1863, 1864 et 1865).

(5) *Nouvelles Annales*, 1870. — 2e série; t. IX, p. 202 et 256.

(6) Cours de la salle Gerson, 1870. — *Nouvelles Annales*, 1870; lettre à M. Bourget.

(7) Jules de la Gournerie. *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Gauthier-Villars, 1867).

a particulièrement étudiée dans ses recherches sur les courbes triangulaires symétriques.

L'équation de cette courbe est assez compliquée, soit dans le système cartésien, soit dans le système des coordonnées polaires, et elle ne prend une forme simple que dans le système, peu employé dans nos cours de Mathématiques spéciales, des coordonnées trilinéaires, quand on adopte pour triangle de référence celui dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement. Ceci explique peut-être pourquoi cette courbe est moins connue que plusieurs autres qui n'offrent pas, à beaucoup près, le même intérêt.

Mais on peut éviter, dans l'étude de l'hypocycloïde à trois rebroussements, l'emploi des coordonnées trilinéaires en remarquant que cette courbe étant du quatrième ordre et possédant trois points doubles, est du genre zéro. En un mot, elle est *unicursale*. C'est sous ce point de vue que nous considérons l'hypocycloïde à trois rebroussements, dans l'étude qui suit.

2. — Prenons les formules :

$$\frac{x}{R} = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad (A)$$

$$\frac{y}{R} = \frac{2t^3}{(1+t^2)^2}. \qquad (B)$$

Elles définissent une courbe et nous ferons voir tout à l'heure, en la construisant, que cette courbe n'est autre chose que celle qui a été étudiée dans les mémoires que nous avons cités. Nous convenons, pour abréger le langage, de la désigner dans les développements qui suivent par la lettre **C**. Il serait, croyons-nous, de peu d'intérêt d'expliquer ici comment nous sommes arrivés à ces formules; on peut y aboutir par des voies diverses, mais nous les prenons simplement comme définissant une courbe **C** dont nous nous proposons l'étude.

3. Construction de la courbe. — La formule (A) prouve que l'on a toujours $x > 0$; de plus, en observant que

$$-\frac{x}{R} + \frac{9}{8} = \frac{(t^2-3)^2}{(t^2+1)^2},$$

on voit que la courbe **C** est comprise tout entière entre l'axe yy' et la droite Δ qui correspond à l'équation

$$x = \frac{9}{8}R.$$

Cherchons maintenant les points communs à **C** et à une droite passant par l'origine. L'équation de cette droite étant

$$y - mx = 0,$$

nous trouvons, pour déterminer m, l'égalité

$$mt^2 - 2t + 3m = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut que l'on ait

$$m^2 < \frac{1}{3},$$

et si, par l'origine, on trace, comme l'indique la figure, deux droites Δ', Δ'', inclinées de 30° sur l'axe ox, elles forment avec Δ un triangle équilatéral dans l'intérieur duquel la courbe **C** est complètement renfermée.

Sans insister autrement sur cette construction, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la courbe **C** qui correspond aux formules (A) et (B) a la forme générale indiquée par la figure ci-dessous.

Les trois sommets O, O', O'', du triangle équilatéral $\Delta\,\Delta'\,\Delta''$. sont les trois points de rebroussement de la courbe et les tangentes en ces points sont les médianes de ce triangle. Les sommets de **C** sont trois points situés sur ces droites et huit fois plus rapprochés de la base du triangle que du sommet correspondant.

4. Interprétation du coefficient t. — Nous ferons observer, avant d'aller plus loin, que *le paramètre arbitraire* t *représente le coefficient angulaire de la tangente au point correspondant.*

On trouve, en effet, par un calcul évident,

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dx}{dt} = 2t\,\frac{3 - t^2}{(1 + t^2)^3},$$

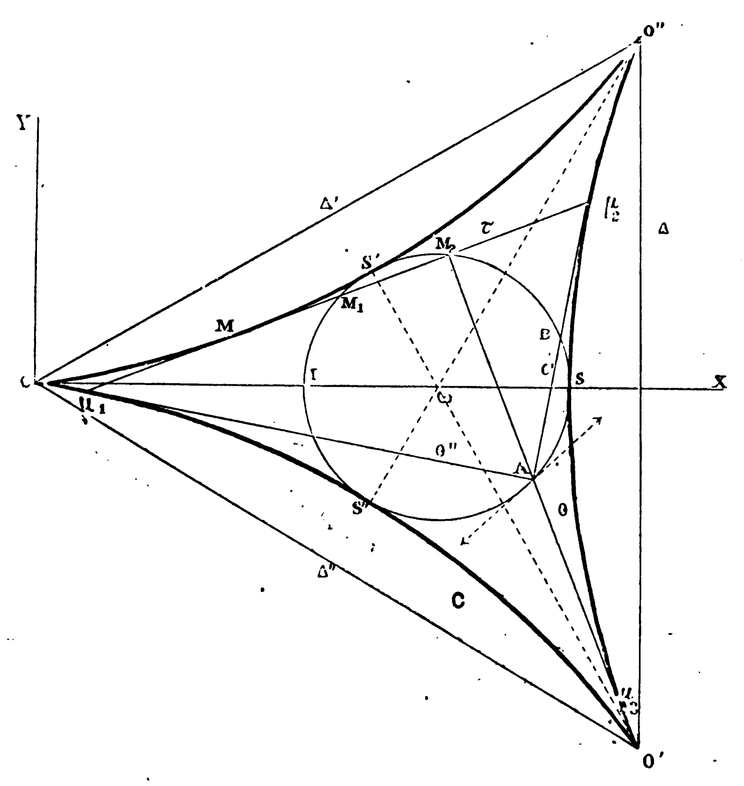
$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dy}{dt} = 2t^2\,\frac{3 - t^2}{(1 + t^2)^3};$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} = t.$$

5. Equation générale des tangentes à la courbe C. — Cherchons maintenant l'équation générale des tangentes à la courbe **C**.

Soit t le paramètre d'un point M pris sur **C**; l'équation



d'une droite parallèle à la tangente en ce point peut toujours être représentée par

$$y - tx + KRt^3 = o;$$

proposons-nous de déterminer K, en exprimant que cette équation est vérifiée par les coordonnées du point M. Nous

avons d'abord

$$\frac{2t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{t^3(3+t^2)}{(1+t^2)^2} + Kt^3 = 0\ ;$$

puis, après simplification,

$$K = \frac{1}{1+t^2}.$$

L'équation générale que nous cherchons est donc

$$y - tx + R\frac{t^3}{1+t^2} = 0\ (1). \qquad (T)$$

Il résulte de cette équation, entre autres conséquences, que *la courbe* **C** *est de la troisième classe,* propriété que nous vérifions par ce calcul, mais qui, comme on le sait, est commune à toutes les quartiques possédant trois points de rebroussement.

Voici maintenant quelques propriétés de la courbe **C** qui découlent très simplement des calculs précédents.

6. Théorème I. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener, à la courbe* C, *deux tangentes rectangulaires est le cercle inscrit aux trois arcs.*

La relation (T) peut s'écrire

$$t^3(R - x) + t^2y - tx + y = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est

$$\frac{y}{x - R},$$

et si le point dont les coordonnées sont x, y, jouit de la propriété énoncée, la quantité

$$\frac{y}{R - x},$$

est une des racines de l'équation précédente. L'équation du lieu cherché est donc,

$$\frac{y^2}{(R-x)^2} + \frac{y^2}{(R-x)^2} - \frac{x}{R-x} + 1 + 0$$

ou,

$$2y^2 - x(R - x) + (R - x)^2 = 0.$$

(1) Cette équation met en évidence immédiate le théorème suivant énoncé par M. Laguerre (*loc. cit.*) : *Les trois tangentes que, par un point, on peut mener à l'hypocycloïde, font, avec une quelconque des tangentes de rebroussement, des angles dont la somme est un multiple de* π.

Cette équation représente bien le cercle δ, inscrit à la courbe, et passant, comme le montre la figure, par ses trois sommets S, S′, S″.

7. Théorème II. — *Si l'on mène à la courbe* **C** *une tangente* T, *elle rencontre* **C** (abstraction faite du point de contact M) *en deux points* μ_1, μ_2 ; *les tangentes en ces points sont rectangulaires.*

Soit t' le paramètre de M, la droite T a pour équation

$$y - t'x + \mathrm{R}\,\frac{t'^3}{1 + t'^2} = 0. \qquad (\delta)$$

Cherchons l'intersection de T avec C et, à cet effet, considérons l'équation

$$\frac{2t^3}{(1 + t^2)^2} - \frac{t't^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2} + \frac{t'^3}{1 + t'^2} = 0,$$

laquelle, après développement, devient

$$t^4t' - 2t^3(1 + t'^2) + t^2t'(3 + t'^2) - t'^3 = 0.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire encore

$$(t - t')^2(t^2t' - 2t - t') = 0.$$

Les paramètres t'', t''', qui correspondent aux points μ_1, μ_2, sont donc les racines de l'équation

$$t^2t' - 2t - t' = 0.$$

On déduit de là

$$t''t''' = -1,$$

et, en rappelant l'interprétation géométrique des coefficients t'' et t''', on voit que les tangentes menées à la courbe **C** aux points μ_1 et μ_2 sont rectangulaires.

8. Théorème III. — *La longueur de la tangente interceptée par la courbe est constante et égale à* R.

Désignons par x'', y'', les coordonnées de μ_1, par x''', y''' celles de μ_2, nous avons

$$(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 = \overline{\mu_1\mu_2}^2.$$

Calculons d'abord les différences $(x'' - x''')$ et $(y'' - y''')$. Nous avons

$$\frac{x'' - x'''}{\mathrm{R}} = \frac{t''^2(3 + t''^2)}{(1 + t''^2)^2} - \frac{t'''^2(3 + t'''^2)}{(1 + t'''^2)^2}.$$

En tenant compte de la relation

$$t''t''' = -1,$$

il vient

$$\frac{x'' - x'''}{R} = \frac{t''^2(3 + t''^2)}{(1 + t'^2)^2} - \frac{3t'^2 + 1}{(1 + t''^2)^2},$$

ou, encore,

$$\frac{x'' - x'''}{R} = \frac{t''^2 - 1}{t''^2 + 1}.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{y'' - y'''}{R} = \frac{2t''}{t''^2 + 1}.$$

Ces deux dernières égalités prouvent que

$$(x'' - x''')^2 + (y'' - y''')^2 = R^2,$$

et l'on a, finalement,

$$\mu_1\mu_2 = R.$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Cremona *(loc. cit.)*.

9. Formules principales. — Les calculs qui précèdent suffisent pour montrer comment on peut très simplement déduire, des formules qui nous ont servi à définir **C**, les propriétés de cette courbe. Pour abréger, nous nous bornerons à énoncer quelques résultats que nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

Les notations suivantes étant adoptées :

τ, coefficient angulaire d'une tangente quelconque $\mu_1\mu_2$;

α, β, coordonnées du point A, point de concours des tangentes en μ_1 et en μ_2;

θ', θ'', coefficients angulaires des deux tangentes rectangulaires issues de A;

θ, coefficient angulaire de la troisième tangente issue de A, on a les relations suivantes

1° $$\frac{\alpha}{R} = \frac{1 + \tau^2}{2(1 + \tau^2)}, \qquad \frac{\beta}{R} = -\frac{\tau}{2(1 + \tau^2)};$$

2° $$T^2 - \frac{2T}{\tau} - 1 = 0,$$

a pour racines θ', θ'';

3° $$\theta = \frac{\beta}{R - \alpha};$$

4° $$\tau = \frac{\alpha - R}{\beta}.$$

De ces formules, et de considérations géométriques élémentaires, découlent des conséquences nombreuses; nous signalerons les plus saillantes, mais sans nous arrêter à les démontrer.

Pour rendre ce tableau plus complet, nous avons énoncé de nouveau les propriétés que nous avons établies plus haut.

10. Propriétés élémentaires principales de l'hypocycloïde. — 1° $\mu_1\mu_2$ est constant;

2° Les tangentes $\mu_1 A$, $\mu_2 A$, sont rectangulaires;

3° Elles se coupent sur le cercle inscrit;

4° La tangente $A\mu_3$ est perpendiculaire sur $\mu_1\mu_2$ au point M_2 qui appartient au cercle inscrit;

5° Les tangentes $A\mu_1$, $A\mu_1$ sont les bissectrices de l'angle formé par la troisième tangente $A\mu_3$ et par la tangente en A au cercle inscrit;

6° SA est le double de SB; SM_2 le double de SA; réciproquement une corde AB d'un cercle qui se meut de telle façon que l'on ait constamment SA = 2SB, engendre une hypocycloïde.

7° On a $$MM_1 = M_1M_2,$$
et $$M\mu_1 = M_2\mu_2.$$

11. Cercle de courbure en un point de l'hypocycloïde. — Sans étendre davantage cette nomenclature qui peut être très longue, comme on peut s'en assurer en se reportant aux mémoires cités, nous nous arrêterons sur cette propriété pour montrer comment elle peut servir à construire le cercle de courbure en un point pris sur **C**. C'est cette construction que nous avons annoncée (1) et qui repose sur la considération des propriétés des transversales réciproques, exposées précédemment.

Prenons sur **C** deux points voisins I, J, et soient IAB, JCD, les tangentes correspondantes qui coupent le cercle inscrit à l'hypocycloïde, respectivement, aux points A, B; C, D.

---

(1) V. *Journal*, p. 152.

Nous avons donc

$$IA = AB, \quad \text{et} \quad JC = CD.$$

Soit R le point de rencontre des deux tangentes considérées; prenons, comme l'indique la figure,

$$BR' = RI, \qquad DR'' = RJ,$$

nous formons ainsi un triangle RR'R″ dans lequel les droites IJ et BD sont deux transversales réciproques, et nous savons *(Journal, loc. cit.)* que l'axe de la parabole P, tangente à IJ, et inscrite au triangle RR'R″, est parallèle à BD.

Cette propriété étant rappelée, imaginons que le point I se déplace sur l'hypocycloïde et qu'il vienne se confondre avec J. A chaque position du point I correspond une parabole P, définie comme nous venons de le dire, et nous allons chercher ce que devient, à la limite, le foyer f de cette courbe, point qui a été déterminé, comme l'indique la figure, en s'appuyant sur les deux propositions suivantes: 1° il appartient au cercle U circonscrit au triangle JRI; 2° après avoir tracé, par le point R, une droite RK parallèle à BD, on mène Rf symétrique de RK, par rapport à la bissectrice de l'angle JRI.

Supposons donc que le point I soit venu se confondre avec J; la droite R'R″ qui est toujours parallèle à AC, puisque les points A, C, sont les milieux des côtés RR', RR″, a pour position limite la droite DR‴ menée par D, parallèlement à la tangente CA'. D'autre part, le cercle RR'R″, cercle qui passe par le point f, devient le cercle V, cercle qui passe par J et par D, tangentiellement à DR‴. Enfin la droite Rf a pour position limite la droite JF, droite menée par J, parallèlement à CA'.

Ainsi le point f a une position limite F, bien déterminée; cherchons maintenant ce qu'est devenu le cercle RIJ, cercle qui passe constamment par le point de concours des normales en I et en J, et par le foyer f. Sur la figure 3, la limite de U serait un cercle U' passant par J, tangentiellement à la droite JCD, et par F. Le centre O de U' s'obtiendra donc en élevant OJ perpendiculaire à CD et en abaissant du point D une perpendiculaire sur JF. Le point de con-

cours des deux normales infiniment voisines s'obtiendra donc en prenant le point symétrique de J, par rapport au point O, et l'on peut dire, finalement, que le rayon de courbure au point J est égal au double de OJ.

On voit d'ailleurs que $OJ = 4\omega H$ et l'on peut énoncer le théorème suivant, que nous croyons nouveau.

Théorème. — *Le rayon de courbure en un point* J, *pris sur l'hypocycloïde, est égal à huit fois la distance du centre du cercle inscrit à la courbe, à la tangente au point considéré.*

NOTES SUR L'ELLIPSOÏDE

Par M. **Édouard Lucas**.

Théorème I. — *Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde.* (Dupin)

Prenons les trois plans pour plans de coordonnées; soient A, B, C les points qui demeurent respectivement dans les plans des YZ, des ZX, des XY; désignons par a, b, c les distances de ces points au quatrième point M de coordonnées x, y, z. Les équations de la droite mobile sont

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma} = \rho,$$

α, β, γ, désignant les coordonnées d'un point N situé sur une parallèle ON à MA menée par l'origine O, et à une distance de l'origine égale à l'unité, et ρ désignant la distance du point de coordonnées X, Y, Z, au point M. Si l'on exprime que les points A, B, C, sont sur cette droite, on trouve

$$-x = a\alpha, \quad -y = b\beta, \quad -z = c\gamma. \qquad (1)$$

On a d'ailleurs

$$\overline{ON}^2 = 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos(y, z) + 2\gamma\alpha \cos(z, x) + 2\alpha\beta \cos(x, y);$$

et en tirant α, β, γ des équations précédentes, on obtient

pour l'équation du lieu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{yz}{bc}\cos(y, z)$$
$$+ 2\frac{zx}{ca}\cos(y, z) + 2\frac{xy}{ab}\cos(x, y) = 1.$$

Théorème II. — *Le volume de l'ellipsoïde considéré dans le théorème* Ier *est indépendant des angles du trièdre.* (Ed. Lucas.)

En effet, le discriminant du premier membre de l'équation précédente est

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{\cos(y,z)}{ab} & \frac{\cos(z,x)}{ac} \\ \frac{\cos(y,z)}{ab} & \frac{1}{b^2} & \frac{\cos(x,y)}{bc} \\ \frac{\cos(z,x)}{ac} & \frac{\cos(x,y)}{bc} & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix}$$

ou, par une transformation immédiate,

$$\delta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\sin^2(x,y,z).$$

On calcule de même Δ et en portant dans l'expression bien connue du volume de l'ellipsoïde, on trouve tout de suite

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Théorème III. — *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un point quelconque de la droite décrit une ellipse: et la droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution.* (Mannheim.)

En effet, désignons par

$$\frac{X}{a_1} + \frac{Y}{b_1} + \frac{Z}{c_1} = 1.$$

l'équation du quatrième plan, et par d la distance du quatrième point qui demeure dans ce quatrième plan au point M. Les coordonnées de ce point sont $x + d\alpha$, $y + d\beta$, $z + d\gamma$; on a donc

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} - 1 + d\left(\frac{\alpha}{a_1} + \frac{\beta}{b_1} + \frac{\gamma}{c_1}\right) = 0.$$

Si l'on élimine α, β, γ, entre cette équation et les équations (1) on trouve

$$(a-d)\frac{x}{aa_1}+(b-d)\frac{y}{bb_1}+(c-d)\frac{z}{cc_1}=1; \qquad (2)$$

donc le point M décrit la courbe d'intersection de l'ellipsoïde avec le plan représenté par l'équation précédente. D'autre part, si l'on élimine x, y, z, entre les mêmes équations, on trouve

$$(a-d)\frac{\alpha}{a_1}+(b-d)\frac{\beta}{b_1}+(c-d)\frac{\gamma}{c_1}+1=0; \qquad (3)$$

donc le point N situé à l'unité de distance de l'origine décrit l'intersection d'une sphère et du plan déterminé par l'équation précédente, et la droite ON est la génératrice d'un cône de révolution.

Théorème IV. — *Lorsque quatre points d'une droite demeurent sur quatre plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses dont les centres sont en ligne droite.*

(Halphen.)

En effet, le diamètre conjugué du plan (2) a pour équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\cos(x,y)+\frac{z}{c}\cos(x,z)=\frac{a-d}{a_1}\lambda,$$
$$\frac{x}{a}\cos(x,y)+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\cos(y,z)=\frac{b-d}{b_1}\lambda,$$
$$\frac{x}{a}\cos(x,z)+\frac{y}{b}\cos(y,z)+\frac{z}{c}=\frac{c-d}{c_1}\lambda.$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir respectivement multipliées par $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, en tenant compte de l'équation (2), on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{yz}{bc}\cos(y,z)+\ldots=\lambda.$$

L'ellipse décrite par le point M est réelle, puisque $\lambda < 1$; on a $\lambda = 1$, lorsque l'ellipse se réduit à un point.

Si l'on élimine $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, entre les équations du diamè-

tre et l'équation (1), on détermine λ par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x,y) & \cos(x,z) & \frac{a-d}{a_1} \\ \cos(x,y) & 1 & \cos(y,z) & \frac{b-d}{b_1} \\ \cos(x,z) & \cos(y,z) & 1 & \frac{c-d}{c_1} \\ \frac{a-d}{a_1} & \frac{b-d}{b_1} & \frac{c-d}{c_1} & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des centres des ellipses, il faut d'abord remplacer a, b, c, d, par $a + \mu$, $b + \mu$, $c + \mu$, $d + \mu$, et éliminer μ. On observe d'abord que la valeur de λ ne change pas; d'ailleurs on tire des équations du diamètre les formules

$$\frac{x}{a+\mu} = \mathrm{P}, \quad \frac{y}{b+\mu} = \mathrm{Q}, \quad \frac{z}{c+\mu} = \mathrm{R},$$

P, Q, R désignant des constantes; donc le lieu des centres est donné par les équations

$$\frac{x - a\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{y - b\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}} = \frac{z - c\mathrm{R}}{\mathrm{R}},$$

qui représentent une ligne droite.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propositions suivantes.

Théorème V. — *Lorsque quatre points d'une droite demeurent sur quatre plans, de telle sorte que la droite se trouve immobilisée, les normales menées aux quatre plans par les traces de la droite sont les génératrices d'un hyperboloïde.*

(Halphen.)

Théorème VI. — *Une droite se déplace de telle sorte que quatre de ses points demeurent dans quatre plans; si l'on mène par la droite un plan parallèle à l'axe du cône de révolution* (Th. III), *tout point de ce plan décrit une ellipse.*

(Mannheim.)

Théorème VII. — *Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette*

droite engendre une surface du quatrième ordre; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux deux plans donnés. (Ed. Lucas.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1884)

(*Suite*, voir p. 161.)

17. — Reconnaître que la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

est homogène.

18. — On considère la droite Δ qui est représentée par les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q\ ;$$

trouver les conditions que doivent vérifier les coefficients a, b, p, q, pour que Δ ait, avec les axes supposés rectangulaires, des plus courtes distances respectivement égales α, β, γ.

19. — Construire la courbe représentée par les équations

$$x = \frac{\sin t}{1 - t}, \quad y = \frac{\cos t}{1 - t}.$$

20. — Trouver les dérivées des fonctions suivantes

$$y = \text{LLL}x, \quad y = \text{arc sin}\,(x - \sqrt{1 - x^2})$$

$$y = x^{x^x}, \quad y = \text{L}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$y = \text{arc sin}\,x + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$y = (\sin x + \cos x)\,e^x.$$

21. — Si deux hyperboloïdes réglés ont deux généra-

trices communes, leur intersection se compose de quatre droites (Théorème de Steiner).

22. — Démontrer que si l'on considère la fraction continue y,

$$y = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1}}}} \quad \cdots \quad 1 - \cfrac{x}{1 - x}$$

et si l'on met y sous la forme

$$y = \frac{u_n}{v_n},$$

(u_n et v_n étant des fonctions entières de x), l'équation $v_n = 0$, a toutes ses racines réelles.

23. — On donne une ellipse U de centre O; démontrer qu'il existe une infinité de quadriques de révolution passant par U et ayant pour centre le point O.

Trouver le lieu décrit par les sommets de ces quadriques, sommets correspondant à l'axe autour duquel la quadrique considérée est de révolution.

24. — Reconnaître (sans expliciter les formes) que si f et φ désignent deux formes entières du troisième degré de la lettre x, on a

$$f\varphi''' - f'\varphi'' + f''\varphi' - f'''\varphi = \textit{constante}.$$

Nota. — On prend la dérivée de l'expression

$$(f\varphi''' - f'''\varphi) - (f'\varphi'' - f''\varphi'),$$

et l'on vérifie qu'elle est nulle.

25. — Lieu des milieux et lieu des pôles d'une corde normale à une conique.

26. — Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point M à un réseau de coniques inscrites dans un parallélogramme donné.

Examiner le cas où le point M s'éloigne à l'infini, dans une direction donnée.

27. — Déterminer K de façon que l'équation

$$x^5 + 2x^3 + x + K = 0,$$

ait une racine double.

28. — En s'appuyant sur l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6},$$

donner une valeur approchée de sin 1°.

29. — Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$y = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{\sin x}{x}.$$

30. — On donne une droite et deux points A et B situés de part et d'autre de la droite. Faire passer par A et B un cercle qui intercepte sur la droite un segment minimum (*).

31. — Soient M et P deux points pris sur une hyperbole H; par M et P on mène des parallèles aux asymptotes de H et l'on forme ainsi un parallélogramme MPQR. Démontrer que QR passe par le centre de H.

32. — Construire les courbes qui correspondent aux équations

1° $$x = \frac{1 + t}{t^2}, \quad y = \frac{1 - t}{t};$$

2° $$\rho = \frac{\sin \varphi}{1 - 2 \cos^2 \varphi};$$

3° $$\rho = \frac{1 - \sin \omega}{1 + 2 \cos \omega};$$

(*) Cette question et les deux suivantes ont été empruntées au *Recueil de questions posées aux examens oraux de l'École polytechnique.* (Croville-Morant, rue de la Sorbonne.)

4° $y^2 - xy + x^3 = 0;$

5° $xy^3 - 3x^2y + a^2 = 0;$

6° $\rho = \dfrac{\sin 3\omega}{\cos \omega};$

7° $\{y(1 - x) - x^2\}^3 = x^7;$

étudier cette courbe à l'origine ; trouver le maximum de y.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ EN SOMMES DE CARRÉS

Par M. **Kœhler.**

Je me propose d'étudier les conditions auxquelles doit satisfaire un polynôme homogène du second degré à n variables pour qu'il soit décomposable en p carrés, p étant plus petit que n; j'étudierai spécialement le polynôme à quatre variables.

Il est nécessaire d'établir d'abord deux propriétés des déterminants sur lesquelles j'aurai à m'appuyer plus loin.

1. — Soient

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

un déterminant quelconque et

$$\Delta = D^2 = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1j}^2 & \Sigma a_{1j}a_{2k} & \dots & \Sigma a_{1j}a_{nk} \\ \Sigma a_{1j}a_{2k} & \Sigma a_{2j}^2 & \dots & \Sigma a_{2j}a_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{1j}a_{nk} & \Sigma a_{2j}a_{nk} & \dots & \Sigma a_{nj}^2 \end{vmatrix}$$

son carré développé ; un quelconque des mineurs principaux de Δ, à p^2 éléments, est égal à la somme des carrés des mineurs que l'on peut former avec les éléments de p lignes

de D qui correspondent à celles du mineur principal considéré.

Je prends le mineur principal de Δ qui occupe l'angle supérieur de gauche, savoir

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\ldots+a_{1n}^2 & a_{11}\,a_{21}+\ldots+a_{1n}\,a_{2n} & \ldots a_{11}\,a_{p1}+\ldots+a_{1n}\,a_{pn} \\ a_{11}\,a_2+\ldots+a_{1n}\,a_{2n} & a_{21}^2+a_{22}^2+\ldots+a_{2n}^2 & \ldots a_{21}\,a_{p1}+\ldots+a_{2n}\,a_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1}\,a_{11}+\ldots+a_{pn}\,a_{1n} & a_{p1}\,a_{21}+\ldots+a_{pn}\,a_2 & \ldots a_{p1}^2+a_{p2}^2+\ldots+a_{pn}^2 \end{vmatrix}$$

Il est la somme de n^p déterminants partiels δ_p, car chacun de ses éléments est une somme de n termes, et il y a p lignes et p colonnes, par suite autant de déterminants partiels qu'il y a d'arrangements complets de n lettres p à p. Une colonne quelconque d'un de ces δ_p n'est autre chose qu'une colonne d'un des mineurs d_p de D pris dans les p premières lignes, tous les éléments étant multipliés par un facteur. Cela posé, les δ_p se partagent en deux classes. D'abord tous ceux qui renferment deux ou plusieurs colonnes égales, abstraction faite des facteurs qui les multiplient, sont identiquement nuls.

Nous avons ensuite des déterminants δ_p composés des mêmes colonnes que les d_p, toujours abstraction faite des facteurs; chacun des d_p fournit 1.2.3... p déterminants de cette espèce. En effet, soit par exemple le mineur

$$d_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

La forme générale des δ_p qui lui correspondent est

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha}^2 & a_{1\beta}a_{2\beta} & \cdots & a_{1\lambda}a_{p\lambda} \\ a_{1\alpha}a_{2\alpha} & a_{2\beta}^2 & \cdots & a_{2\lambda}a_{p\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1\alpha}a_{p\alpha} & a_{2\beta}a_{p\beta} & \cdots & a_{p\lambda}^2 \end{vmatrix} = a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{p\lambda} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \cdots & a_{1\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdots & a_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & \cdots & a_{p\lambda} \end{vmatrix}$$

les indices $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ ayant toutes les valeurs 1, 2, 3, ... p. Le nombre des δ_p de cette espèce est égal au nombre des permutations de p lettres, puisqu'on peut former chacune des colonnes avec des éléments pris dans chacune des p colonnes

de Δ_p. Mais l'un quelconque de ces $1.2.3\ldots p$ déterminants n'est autre chose que d_p dont les colonnes ont été déplacées, et le facteur $a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{p\lambda}$ est un des termes de d_p. Ce terme est d'ailleurs multiplié par d_p pris avec le signe dont est affecté le terme lui-même dans le développement de d_p. Car le nombre des permutations nécessaires pour passer de d_p à δ_p est évidemment égal au nombre des inversions qui font passer du terme principal $a_{11}, a_{22} \ldots a_{pp}$ au terme $a_{1\alpha}, a_{2\beta} \ldots a_{p\lambda}$.

On conclut de là que la somme des $1 . 2 . 3 \ldots p$ déterminants δ_p qui renferment les colonnes de d_p permutées de toutes les manières possibles est égal à d_p^2.

De même tous les autres mineurs analogues à d_p que l'on peut obtenir en prenant p colonnes dans les p premières lignes de D se retrouvent au carré dans le développement Δ_p.

Le même raisonnement s'applique à l'un quelconque des mineurs principaux de Δ.

2. — Soient D un déterminant quelconque, D_{pr} le mineur du premier ordre relatif à l'élément a_{pr} . d_{pr}^{qs} le mineur du second ordre obtenu en supprimant les lignes et colonnes où se trouvent les éléments a_{pr}, a_{qs} : on aura la relation

$$D_{pr}D_{qs} - D_{ps}D_{qr} = D \,.\, d_{pr}^{qs}.$$

Un mineur quelconque D_{ik} peut s'écrire

$$D_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,k-1} & 0 & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En le développant suivant les éléments de la j^{me} ligne, on aura

$$D_{ik} = a_{j,1}d_{ik}^{j1} + a_{j2}d_{ik}^{j2} + \ldots + a_{j,k-1}\, d_{ik}^{j,k-1} + a_{jk}d_{ik}^{jk} + a_{j,k+1}\, d_{ik}^{j,k+1} + \ldots a_{jn}d_{ik}^{jn}. \qquad (1)$$

Le terme $a_{jk}d_{ik}^{jk}$ s'annule, car le mineur d_{ik}^{jk} a une ligne composée d'éléments nuls ; je l'écris seulement pour la symétrie.

On a aussi

$$o = a_{j1}d_{ik}^{l1} + a_{j2}d_{ik}^{l2} + \ldots + a_{jn}d_{ik}^{ln}, \qquad (2)$$

car c'est le développement de D_{ik} dans lequel les lignes d'ordre j et l seraient égales.

Enfin, on a également

$$-D_{ik} = a_{j1}d_{i1}^{jk} + a_{j2}d_{i2}^{jk} + \ldots + a_{jn}d_{in}^{jk}. \qquad (3)$$

En effet $d_{ik}^{jl} = -d_{il}^{jk}$, car le premier de ces deux mineurs du second ordre se déduit de D en effaçant les lignes i et j, les colonnes k et l; le second se déduit de D de la même manière, mais après la permutation des colonnes k et l. Le développement qui constitue le second membre de (3) est donc bien $-D_{ik}$.

Cela posé, écrivons les identités

$$a_{11}D_{1s} + a_{21}D_{2s} + \ldots + a_{n1}D_{ns} = o$$
$$a_{12}D_{1s} + a_{22}D^{2s} + \ldots + a_{n2}D_{ns} = o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1s}D_{1s} + a_{2s}D_{2s} + \ldots + a_{ns}D_{ns} = D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}D_{1s} + a_{2n}D_{2s} + \ldots + a_{nn}D_{ns} = o$$

En multipliant la première par d_{pr}^{q1}, la deuxième par $^{q2}_{pr}$, etc., on voit que le coefficient de D_{qs} sera D_{pr} d'après la formule (1), que le coefficient de D_{ps} sera $-D_{qr}$ d'après la formule (3), tous les autres coefficients seront nuls [formule (2)]. Donc il reste

$$D_{pr}D_{qs} - D_{ps}D_{qr} = Dd_{pr}^{q}. \qquad (4)$$

Lorsque le déterminant D est symétrique ($a_{ik} = a_{ki}$), on aura $D_{ik} = D_{ki}$; si dans l'égalité précédente on suppose $r = p$, $s = q$, elle devient

$$D_{pp}D_{qq} - (D_{pq})^2 = D.\ d_{pp}^{qq}. \qquad (5)$$

Théorème. — *Lorsque le déterminant de* n *fonctions linéaires à* n *variables est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre* n — p *inclusivement, il existe entre ces fonctions* n — p + 1 *relations linéaires.*

Soient les n fonctions :

$$P_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$
$$P_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{\ } = a_{n1}x_1 + a^{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

Je suppose que le déterminant D des coefficients soit nul, ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux de l'ordre $n-p$ (à p^2 élements), et que l'un au moins des mineurs de l'ordre $n-p+1$ soit différent de zéro, par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,p-1} \end{vmatrix} = d$$

Je considère le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a^{2}_{,p-1} & a_{2,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,p-1} & a_{p-1,p} \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p,p-1} & a_{pp} \end{vmatrix}$$

qui est nul d'après les hypothèses; je désigne par δ_{1p}, δ_{2p}, ... δ_{pp} les mineurs de δ relatifs aux éléments de la dernière colonne, et je multiplie les p premières équations par δ_{1p}, δ_{2p}, ... δ_{pp}; il vient

$$\begin{aligned} & P_1\delta_{1p} + P_2\delta_{2p} + \dots + P_{p-1}\delta_{p-1,p} + P_p\delta_{pp} \\ & = x_1(a_{11}\delta_{1p} + a_{21}\delta_{2p} + \dots) + x_2(a_{12}\delta_{1p} + a_{22}\delta_{2p} + \dots) + \dots \\ & + x_p(a_{1p}\delta_{1p} + a_{2p}\delta_{2p} + \dots) + \dots + x_n(a_{1n}\delta_{1p} + a_{2n}\delta_{2p} + \dots) \end{aligned}$$

Les coefficients de $x_1, x_2, \dots x_n$ sont identiquement nuls; ceux de x_1, x_2 ... x_{p-1} ne sont autre chose que δ dans lequel on a rendu deux colonnes égales; celui de x_p est δ lui-même; ceux de x_{p+1}, x_{p+2}, ... x_n sont des mineurs d'ordre $n-p$ du déterminant D. On a donc

$$P_1\delta_{1p} + P_2\delta_{2p} + \dots + P_{p-1}\delta_{p-1,p} + P_p\delta_{pp} = 0$$

et dans cette relation l'un au moins des coefficients n'est pas nul, savoir δ_{pp} qui n'est autre chose que d.

En remplaçant successivement la dernière ligne de δ par les p premiers coefficients de P_{p+1}, P_{p+2}, ... P_n, on trouve de la même manière d'autres relations de même forme, et en définitive les $n-p+1$ fonctions P_p, P_{p+1}, ... P_n pourront s'exprimer en fonction linéaire de P_1, P_2 ... P_{p-1}.

(A suivre.)

CONCOURS DES BOURSES DE LICENCE

1. — Indiquer, pour chaque valeur du paramètre a, le nombre des racines réelles de l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - a = 0.$$

Résoudre l'équation.

2. — Lieu des sommets des cônes passant par une ellipse donnée, et coupant un plan donné suivant une hyperbole équilatère. Discussion du lieu. Détermination des sections circulaires.

---

1. — Théorie des diamètres dans la parabole cubique

$$y^3 = 2px.$$

2. — Lieu des centres des hyperboles tangentes aux deux axes de coordonnées en des points A et B.

(Bordeaux 1882.)

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et A′, et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O. 1° Lieu des points de contact des plans tangents perpendiculaires à AA′; — 2° lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces; — 3° en supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles d'un plan donné, le lieu des sommets, le lieu des centres. *(Amigues.)*

139. — Dans un plan mené par un des axes d'un ellipsoïde, on trace une circonférence ayant pour centre le centre

de l'ellipsoïde; puis on mène tous les plans tangents à l'ellipsoïde et qui contiennent une tangente à la circonférence. Construire les projections du lieu des points de contact sur le plan de la circonférence et sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'ellipsoïde situé dans ce plan. *(L. Levy.)*

140. — Assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(2a^2 - 2a - 1)x^2 - 4(a^2 - 1)xy + (2a^2 + 2a - 1)y^2 = -1,$$

dans laquelle a est un entier donné.

NOTE. — *On trouvera deux séries de solutions; l'une commence par les systèmes de valeurs*

$$\begin{cases} x = a + 1 \\ y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 4 \\ y = 3a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a + 15 \\ y = 11a + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

L'autre série se déduit de la précédente, en observant que, si l'on change a *en* — a, *l'équation demeure la même, à l'échange près des indéterminées l'une dans l'autre. On a donc encore pour la proposée, les solutions*

$$\begin{cases} x = a \\ y = a - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 1 \\ y = 3a - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11a - 4 \\ y = 11a - 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

(S. Realis.)

141. — On propose d'assigner, par un procédé direct, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$(a^2 - a - 1)x^2 - (2a^2 - 3)xy + (a^2 + a - 1)y^2 = 1,$$

a étant un entier donné.

NOTE. — *On trouvera, en outre des valeurs initiales* $x = 1$, $y = 1$, *les deux séries de solutions*

$$\begin{cases} x = a + 2 \\ y = a + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a + 5 \\ y = 3a + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a + 13 \\ y = 8a + 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = a - 1 \\ y = a - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3a - 2 \\ y = 3a - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8a - 5 \\ y = 8a - 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

se déduisant l'une de l'autre, comme dans la question précédente.

(S. Réalis.)

142. — Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

jouissant de la propriété que si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+ 1$, ou à $- 1$.

(*Laguerre.*)

143. — Déterminer tous les triangles équilatéraux T que l'on peut inscrire dans une conique. Dans quel cas les cercles circonscrits aux triangles T passent-ils par un point fixe? Dans quel cas passent-ils par deux points fixes?

(*Laguerre.*)

144. — On considère un angle droit yOx; sur Ox, un point fixe $A(OA = a)$; sur Oy un autre point fixe $B(OB = b)$; on suppose $a > b$, et on pose $a^2 - b^2 = c^2$. Par les points A et B, on fait passer un système de deux droites rectangulaires, ωA, ωB, et l'on construit une hyperbole équilatère passant par l'origine O, et admettant ces droites pour axes de symétrie. On demande alors : 1° de démontrer que par un point du plan passent deux de ces hyperboles ; 2° de trouver l'enveloppe de ces coniques ; cette courbe est du quatrième degré et possède un point de rebroussement à l'origine ; 3° trouver le lieu des sommets, le lieu des foyers, le lieu des points communs à la directrice et à l'axe ; 4° le lieu des projections de l'origine sur les asymptotes. On démontrera que ces différents lieux sont constitués par un système de deux cercles.

(*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 19878-4.

REPRÉSENTATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. G. de Longchamps.

1. Définition d'une surface omaloïde. — M. Sylvester (*) et, après lui, M. Cremona (**) ont proposé d'appeler *surfaces omaloïdes* celles qui jouissent de la propriété que nous allons développer.

Imaginons qne les coordonnées homogènes d'un point $m(x, y, z, u)$ soient liées à celles d'un point correspondant $M(X, Y, Z, U)$, par les formules :

$$\frac{x}{\varphi_1} = \frac{y}{\varphi_2} = \frac{z}{\varphi_3} = \frac{u}{\varphi_4}, \qquad \text{(A)}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ représentant des fonctions algébriques rationnelles, entières et homogènes des lettres X, Y, Z, U. Supposons maintenant que l'on puisse déduire des formules (A) les suivantes :

$$\frac{X}{\psi_1} = \frac{Y}{\psi_2} = \frac{Z}{\psi_3} = \frac{U}{\psi_4}, \qquad \text{(B)}$$

les dénominateurs $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ représentant encore des fonctions algébriques rationnelles, entières et homogènes des lettres x, y, z, u.

Si le point M est mobile dans un plan Π; si l'on a, par conséquent,

$$AX + BY + CZ + DU = o,$$

le point correspondant m décrit la surface Σ qui correspond à l'équation

$$A\psi_1 + B\psi_2 + C\psi_3 + D\psi_4 = o. \qquad (\Sigma)$$

Je dis que Σ peut se représenter, point par point, sur un plan.

En effet, soient (x_1, y_1, z_1, u_1) les coordonnées d'un point particulier m_1 de Σ; les formules (B) permettent de calculer des quantités X_1, Y_1, Z_1, U_1, auxquelles corresponde un point

(*) Sylvester. *Nel Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI, p. 12.

(**) Cremona. *Sulle trasformazioni razianoli nello spazio. Rendiconti de Reale Istituto Lombardo*. Série II, vol. IV, fasc. X (mai 1871).

M_1. Mais les relations (B) et (Σ) donnent, par combinaison,

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + DU_1 = o.$$

Ainsi, à tout point de Σ correspond un point de Π.

La réciproque est vraie. Pour l'établir, imaginons maintenant un point quelconque $M'(X', Y', Z', U')$ du plan Π. Les formules (A) donnent une solution unique, et bien déterminée, pour x, y, z, u; exception faite (dans ce cas, comme dans le précédent) de l'hypothèse particulière où les dénominateurs s'annulent simultanément.

Soit x', y', z', u' la solution donnée par les formules (A), je dis que le point correspondant m' appartient à Σ. En effet, des relations

$$\frac{x'}{\varphi_1'} = \frac{y'}{\varphi_2'} = \frac{z'}{\varphi_3'} = \frac{u'}{\varphi_4'},$$

on déduit, par le calcul même qui a permis de passer des formules (A) aux formules (B),

$$\frac{X'}{\psi_1'} = \frac{Y'}{\psi_2'} = \frac{Z'}{\psi_3'} = \frac{U'}{\psi_4'}.$$

Mais le point M' est, par hypothèse, situé dans le plan Π; on a donc

$$AX' + BY' + CZ' + DU' = o,$$

et, finalement,

$$A\psi_1' + B\psi_2' + C\psi_3' + D\psi_4' = o.$$

Cette égalité prouve que le point m' appartient à Σ.

Lorsqu'une surface Σ jouit de la propriété de pouvoir être représentée ainsi, point par point, sur un plan, M. Sylvester dit que Σ est une surface omaloïde. Nous adopterons aussi cette expression; mais, sans rien changer à la généralité de la définition que nous venons de développer, nous la modifierons légèrement et nous rapprocherons ici ces deux idées, qui se correspondent si intimement, *les courbes unicursales* et *les surfaces omaloïdes*.

2. Définition élémentaire des surfaces omaloïdes (1). — Supposons que les coordonnées x, y, z d'un point de l'espace, mobile sur une surface Σ, puissent être

(1) M. Picart (*Thèse de Mathématiques*, 1877) a aussi considéré ces surfaces qu'il a nommées *surfaces unicursales*.

représentées par les formules

$$x = \frac{\varphi_1}{\varphi},\ y = \frac{\varphi_2}{\varphi},\ z = \frac{\varphi_3}{\varphi}, \qquad (\alpha)$$

φ, φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions entières de deux lettres t, θ; la surface Σ est, en général, et sauf une vérification nécessaire que nous signalerons tout à l'heure, une omaloïde.

Imaginons, en effet, un plan Π et, dans ce plan, prenons deux axes de coordonnées ωt, $\omega\theta$. A un point m' du plan Π correspondent des coordonnées t', θ'; les formules (α) permettent de calculer les valeurs, correspondantes d'x, d'y et de z. Soient x', y', z' ces valeurs, et soit M' le point correspondant, point situé sur Σ. On peut dire qu'à un point m' de Π correspond un point unique, et bien déterminé, de Σ; il n'y a d'exception que dans le cas où les fonctions φ, φ_1, φ_2, φ_3 s'annulent simultanément, et alors les formules (d) devraient être simplifiées.

Considérons maintenant les équations (α) et cherchons à les résoudre par rapport à t et à θ. Cette résolution est possible, si x, y, z, représentent, comme nous le supposons, les coordonnées d'un point de Σ, et elle conduit, *en général,* à des expressions de la forme

$$t = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \theta = \frac{\psi_2}{\psi}, \qquad (\beta)$$

ψ, ψ_1, ψ_2 désignant des fonctions entières des lettres x, y, z. Ceci résulte de ce fait qu'en éliminant t entre les égalités (α) on obtient *deux* équations en θ, lesquelles n'admettent *en général* qu'*une* solution commune. Mais cette règle souffrant des exceptions, avant d'affirmer que les formules (α) représentent une surface omaloïde, on devra s'assurer qu'on peut déduire les égalités (β) des relations proposées (α).

3. Théorème. — *Les quadriques à centre sont des surfaces omaloïdes.*

La considération des génératrices qui passent par un point de l'hyperboloïde à une nappe conduit aux équations connues

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= t\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right), \\ t\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} + \frac{y}{b}; \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \theta\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right), \\ \theta\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} - \frac{y}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (G')$$

En considérant dans ces égalités x, y, z, comme des inconnues, on sait que ces équations sont compatibles et conduisent aux formules

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + t\theta}{1 - t\theta}, \quad \frac{y}{b} = \frac{t - \theta}{1 - t\theta}. \quad \frac{z}{c} = \frac{t + \theta}{1 - t\theta}. \qquad (H_1)$$

Ces égalités donnent d'ailleurs, par un calcul évident,

$$t = \frac{a(bz + cy)}{bc(x + a)}, \quad \theta = \frac{a(bz - cy)}{bc(x + a)}. \qquad (h_1)$$

Les formules (H_1) et (h_1) montrent déjà que les hyperboloïdes réglés sont des surfaces omaloïdes. Il est un peu plus difficile de voir comment cette propriété s'étend aux surfaces à centre dénuées de génératrices rectilignes réelles. On y parvient pourtant, très simplement, comme il suit.

Les formules (H_1) et la relation connue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

conduisent à la relation identique

$$(1 + t\theta)^2 + (t - \theta)^2 - (t + \theta)^2 = (1 - t\theta)^2.$$

Posons maintenant

$$t - \theta = 2u, \text{ et } t + \theta = 2v,$$

et nous aurons l'identité

$$(1 + v^2 - u^2)^2 + 4u^2 - 4v^2 = (1 - v^2 + u^2);$$

si, dans cette identité, nous changeons v^2 en $-v^2$, ou v en iv, comme on voudra, l'identité subsiste et prend la forme nouvelle :

$$(1 - v^2 - u^2)^2 + 4u^2 + 4v^2 = (1 + v^2 + u^2)^2. \quad (1)$$

C'est cette identité qui permet de calculer les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde et celles d'un point de l'hyperboloïde à deux nappes, comme nous allons le montrer.

L'égalité (1), écrite sous la forme

$$\left(\frac{1 - v^2 - u^2}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2v}{1 + v^2 + u^2}\right)^2 = 1,$$

donne pour représenter un point de l'ellipsoïde les formules:

$$\frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2},\ \frac{y}{b}=\frac{2t}{1+t^2+\theta^2},\ \frac{z}{c}=\frac{2\theta}{1+t^2+\theta^2};\qquad (E)$$

desquelles on déduit, d'ailleurs,

$$t=\frac{ay}{b\,(a+x)}\ \text{ et }\ \theta=\frac{az}{c\,(a+x)}.\qquad (e)$$

Enfin, si nous revenons à l'égalité (1) et si nous l'écrivons de la manière suivante :

$$\left(\frac{1-v^2-u^2}{2v}\right)^2+\left(\frac{u}{v}\right)^2+1=\left(\frac{1+v^2+u^2}{2v}\right)^2,$$

les coordonnées d'un point de l'hyperboloïde à deux nappes pourront, d'après cette remarque, être représentées par les formules.

$$\frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{2\theta},\quad \frac{y}{b}=\frac{t}{\theta},\quad \frac{z}{c}=\frac{1+t^2+\theta^2}{2\theta}.\qquad (H_2)$$

De ces égalités nous tirons aussi

$$\theta=\frac{ac}{az+cx}\ \text{ et }\ t=\frac{acy}{b\,(az+cx)}.\qquad (h_2)$$

Les formules (E), (e); (H_1), (h_1); (H_2), (h_2) établissent que les quadriques à centre sont omaloïdes et peuvent se représenter, point par point, sur un plan.

Nous allons maintenant montrer l'utilité de cette remarque et déduire des propriétés élémentaires des droites et des cercles des propriétés correspondantes pour les quadriques à centre.

Mais il nous faut entrer d'abord dans quelques développements qui sont comme la base de la transformation qui nous occupe. *(A suivre.)*

HYPERBOLE DES NEUF POINTS

NOUVELLE ANALOGIE ENTRE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET LE CERCLE

Par M. **Brocard**, capitaine du génie.

---

1. — La transformation par droites symétriques est un cas particulier de la transformation biquadratique ; en d'autres termes, à chaque point M du plan correspond un

point unique bien déterminé M'; à chaque droite une conique.

Les points fondamentaux de la transformation sont au nombre de trois, les sommets du triangle de référence ABC. Les côtés opposés en sont les courbes fondamentales.

Le cercle fixe (c) des trois points fondamentaux est le cercle circonscrit à ce triangle (*).

Parmi les points remarquables que l'on rencontre ainsi dans le triangle, et que l'on obtient par l'intersection des droites symétriques (**), on peut citer, par exemple, le centre O du cercle (c) et le point de rencontre H des hauteurs (ou orthocentre); le centre de gravité E et le centre des médianes anti-parallèles K (***), etc.

Ces points, et d'autres analogues jouissent de nombreuses propriétés, dont l'étude a occupé récemment plusieurs géomètres (****).

2. — Ces préliminaires posés, il est facile d'établir que *La conique* (C^2) *correspondant à une droite* (d) *est une ellipse*,

---

(*) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. V, 1873, p. 206-240 (Mémoire de M. Dewulf), et t. VI, 1882, p. 152-168 (Mémoire de M. Schoute).

(**) La transformation dont il s'agit revient à celle que M. A. Mathieu a indiquée dans son *Étude de Géométrie comparée*, publiée aux *Nouvelles Annales* de 1865 (t. IV, p. 393, 481 et 529). Le mode de conjugaison employé dans ce travail est le *faisceau d'inversion*, formé de deux systèmes de droites dont les bissectrices coïncident. Ce sont donc les *droites symétriques* dont il est question ici.

Les diverses propriétés générales énoncées plus loin se trouvent indiquées ou démontrées déjà par M. Mathieu dans le mémoire cité. D'autres géomètres les ont également rencontrées dans leurs recherches.

(***) Ce point de rencontre des médianes anti-parallèles, ou des *symédianes*, suivant l'expression plus abréviative proposée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, t. II, 1883, p. 450-464), a été étudié pour la première fois en tous détails par M. E. Lemoine dans plusieurs communications insérées aux *Nouvelles Annales* (1873, t. XII, p. 364-366) et aux *Annuaires du Congrès de l'Association française* (1873 et 1874). Il avait bien été rencontré fortuitement par d'autres géomètres, dans la solution de plusieurs problèmes isolés, et l'on en avait déduit autant de constructions différentes (Gauss, Schlömilch, Grebe, Hossard, Hain, Mathieu, etc.); mais c'est M. E. Lemoine qui a fait ressortir toute l'importance de ce point dans la géométrie du triangle. (Voir *Mathesis*, t. I, 1881, p. 153, 173 et 185, la notice de M. J. Neuberg.)

(****) Voir, par exemple, *Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht*, t. XII à XV, 1881 à 1884.

une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite (d) *est extérieure, sécante ou tangente au cercle* (c).

Considérons, en particulier, les sécantes issues d'un point M du plan.

Les points où elles rencontrent chaque côté du triangle ABC ont leurs correspondants sur les deux autres côtés, c'est-à-dire au sommet opposé. On en conclut que

La conique de transformation d'une droite (d) *est circonscrite au triangle de référence.*

3. — Les points L_1 L_2 où cette droite (*d*) rencontre le cercle (*c*) ont leurs correspondants à l'infini, et dans la direction symétrique des lignes AL_1 AL_2, ou BL_1 BL_2, ou CL_1 CL_2 par rapport aux bissectrices du triangle.

Ces droites passent par les points diamétralement opposés à L_1 et à L_2 sur le cercle (*c*).

On en déduit aisément que

Les deux angles des asymptotes sont mesurés par la moitié des arcs suivant lesquels la droite (d) (L_1L_2) *divise le cercle* (c) *des trois points fondamentaux de la transformation* (*).

A toute autre sécante du cercle (*c*) correspond une hyperbole circonscrite au triangle ABC ;

Et réciproquement :

A toute hyperbole circonscrite au triangle ABC correspond une certaine droite (*d*).

4. — Au faisceau de sécantes issues du point M correspond, comme on vient de le voir, un faisceau d'hyperboles circonscrites au triangle ABC.

Parmi ces coniques, il est intéressant de chercher à quelles droites (*d*) correspondent des hyperboles équilatères.

Or, on sait que

L'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle ABC *passe par l'orthocentre* H *de ce triangle* (**).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, 1877, p. 37-42. Questions 1163 et 1164 (Haton). Voir aussi dans le même volume le Mémoire de M. Amigues sur les transformations du second ordre dans les figures planes, et dans le t. IV, 1865, l'étude de M. Mathieu.

(**) Brianchon et Poncelet (*Annales de Gergonne*, t. XI, 1821).

Mais, en vertu de la réciprocité des figures conjuguées, la sécante correspondante (*d*) doit passer par le point O conjugué du premier. On en conclut que

Le faisceau d'hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC *correspond au faisceau de rayons du cercle* (c) *circonscrit à ce triangle.*

On aurait pu arriver à la même conclusion en observant que l'angle L_1BL_2 des asymptotes de l'hyperbole, défini par la condition indiquée au § 3, devient un angle droit lorsque la sécante L_1L_2 est un diamètre du cercle (*c*).

5. — Cela posé, parmi les hyperboles équilatères dont il vient d'être parlé, il y a lieu de remarquer celle qui passe par le centre de gravité E du triangle.

Cette condition entraîne d'intéressantes conséquences.

En effet, l'hyperbole équilatère correspond alors au rayon OK du cercle (*c*), passant par le point K, centre des symédianes, ou point de Lemoine (*) (Voir § 1). Cette ligne OK n'est autre que le diamètre du cercle de Brocard; et, par conséquent, l'hyperbole équilatère correspondante passe aussi par les points

D centre d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ (voir les notices antérieures) (**) et conjugué de D' pôle de la corde $\omega\omega'$ du cercle de Brocard.

Z' conjugué de Z, milieu de OK et centre du cercle de Brocard.

S' conjugué de S, milieu de $\omega\omega'$.

Ainsi, nous rencontrons une hyperbole équilatère (Γ) circonscrite au triangle ABC, et passant par cinq autres points remarquables résultant de constructions géométriques : HEDZ'S'.

La détermination complète de cette hyperbole mérite donc quelque intérêt. Elle fait l'objet de la présente notice.

6. — L'hyperbole (Γ) appartient à un faisceau de coniques dont il est facile de trouver, par exemple, le lieu des centres.

(*) Comme M. J. Neuberg a proposé de le désigner.

(**) *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. II, 1883.

Les côtés du triangle et les hauteurs correspondantes représentent les variétés de ces coniques réduites à leurs asymptotes ; les pieds des hauteurs font donc partie du lieu.

D'autre part, les trois sommets du triangle ABC et les symétriques des sommets par rapport aux milieux des côtés donnent trois parallélogrammes par les sommets desquels on peut faire passer des hyperboles équilatères ayant pour centre les milieux considérés. Ces points — milieux des côtés du triangle — font donc encore partie du lieu géométrique cherché.

Enfin, il en est de même des milieux des segments des hauteurs compris entre les sommets du triangle et l'orthocentre : car les hyperboles équilatères circonscrites au triangle passent par l'orthocentre H.

Le lieu des centres passe donc par les neuf points qui définissent le *cercle* (c') *des neuf points*.

Mais, en général, le lieu des centres des coniques passant par quatre points, c'est-à-dire satisfaisant à quatre conditions, est une conique. (Brianchon et Poncelet, *loc. cit.*)

Dans le cas qui nous occupe, cette conique n'est autre que le cercle (c'). En conséquence

Le cercle (c') *des neuf points est le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites au triangle* ABC. (Brianchon et Poncelet, *loc. cit.*) (*).

7. — Ainsi que j'ai eu déjà l'occasion d'en montrer l'utilité, ce cercle (c') peut être défini : la figure semblable au cercle (c) circonscrit au triangle ABC, le centre de similitude étant l'orthocentre H et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$. Le centre O de ce cercle est au milieu de OH (**).

(*) La notion du *cercle des neuf points* a été très explicitement établie par Brianchon et Poncelet dans le Mémoire cité. C'est le même cercle qui porte aussi le nom de Feuerbach, géomètre, qui a reconnu sa remarquable propriété d'être tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits. (*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des Dreiecks*. Nürnberg 1822.)

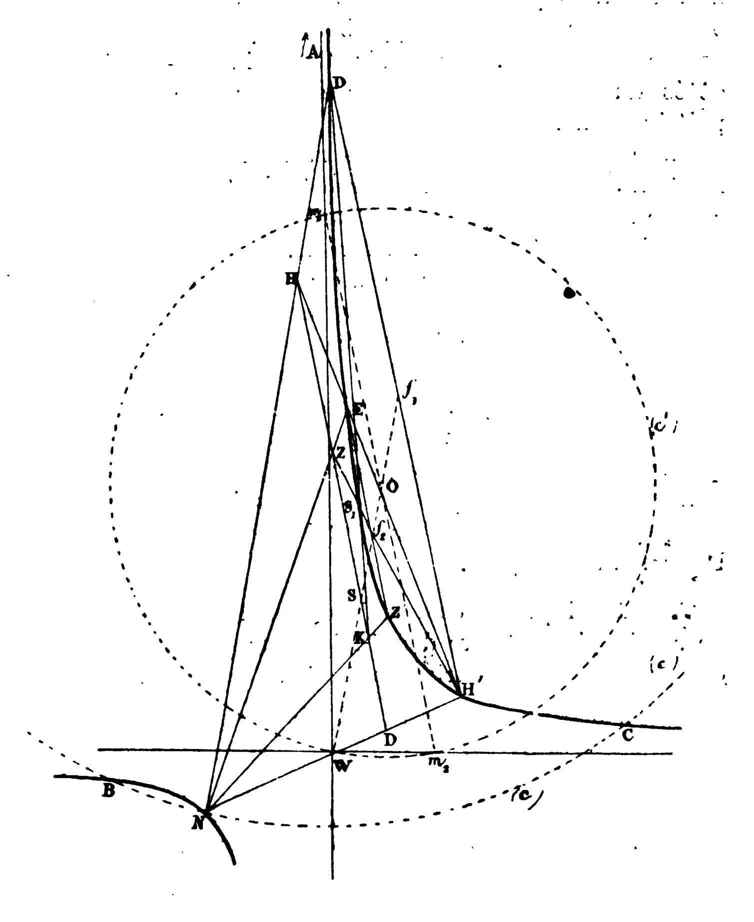
Dans la géométrie de MM. Rouché et De Comberousse, le *cercle des neuf points* est attribué à Euler. Pourquoi ne lui donnerait-on pas le nom de ce grand géomètre ?

(**) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, 1873, p. 224.

Ce point de vue pourra nous servir dans la suite.

Nous arrivons donc à ce résultat que

Le centre W *de l'hyperbole* (Γ) *se trouve sur le cercle* (C′) *et les asymptotes de cette conique rencontrent ce cercle en deux points* m_1, m_2 *diamétralement opposés.*



Observons, maintenant, que l'hyperbole (Γ) est circonscrite à un trapèze. On a établi, en effet, le parallélisme des lignes HD, EZ′.

Les milieux f_1, f_2 de ces deux cordes sont donc sur un diamètre passant par le point S d'intersection des côtés DE, HZ' du trapèze. On a vu que ce point S est sur OK.

Le diamètre f_1Of_2S rencontre la circonférence (c') en deux points, l'un du côté de la grande base DH, l'autre du côté de la petite base EZ'. Ce dernier, W, est le seul qui réponde à la question. Il représente le centre cherché.

Quant aux asymptotes, ce sont les droites Wm_1 Wm_2 joignant le point W aux extrémités du diamètre m_1m_2 du cercle (c') parallèle aux cordes HD, EZ', ou à la droite OK.

8. — Parmi les propriétés étudiées dans une précédente notice, on a établi que OS parallèle à DH est la moitié de DH. On en conclut que f_1f_2S est parallèle à OD et que le point W où elle rencontre HN est au milieu de cette ligne.

La définition du § 7 conduirait d'ailleurs à cette remarque. Mais le point N, symétrique du point H par rapport au point W, appartient à la fois à l'hyperbole (Γ) et au cercle (c).

Ainsi, nous arrivons à la détermination complète d'une hyperbole équilatère (Γ) passant par neuf points remarquables du plan du triangle.

Cette hyperbole des neuf points est d'autant plus intéressante à signaler, qu'elle devient l'analogue du *cercle des neuf points*, et qu'elle établit, d'une manière nouvelle et très simple, la liaison de divers points associés au triangle par voie de transformation biquadratique résultant de l'emploi de droites symétriques.

Cette conique n'est pas le seul exemple de l'hyperbole équilatère passant par neuf points du plan. Il existe, en effet, un groupe de neuf points qui se trouvent toujours sur une hyperbole, et, dans un cas particulier, cette conique devient une hyperbole équilatère, et passe en outre par un dixième point du plan.

Les points dont il est question sont les suivants : les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère inscriptible, les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales, et enfin le centre du cercle.

Voir *Nouvelles Annales*, 1864, t. III, p. 265-267.

9. — Les propriétés reconnues dans l'hyperbole (Γ) donnent quelque intérêt à la recherche de son paramètre, qui doit avoir une forme symétrique et une expression relativement simple.

Pour y parvenir, on devra former l'équation de l'hyperbole A, B, C, E, puis les équations des asymptotes, et calculer le produit des distances d'un des points A, B, C, E aux deux asymptotes. Ce produit doit, évidemment, être constant et représenter le carré du paramètre cherché.

Prenons pour origine le milieu A' d'un côté BC du triangle et pour axe des x ce côté (coordonnées rectangulaires).

Ce choix d'axes semble de nature à faciliter les calculs, pour les raisons suivantes :

1° Le terme du premier degré en x doit disparaître de l'équation générale;

2° Les coordonnées des points A et E sont proportionnelles entre elles. Les résultats de leur substitution dans l'équation générale doivent donc être identiques pour les termes du second degré, et ne différer que pour les autres termes de degré moindre.

L'équation générale des hyperboles équilatères passant par les points B et C étant

$$x^2 + B_1xy - y^2 + E_1y - \frac{a^2}{4} = 0,$$

la substitution des coordonnées des points A $\left(x = b\cos C - \frac{a}{2},\right.$ $y = b\sin C)$ et E $\left(x = \frac{1}{3}(b\cos C - \frac{a}{2}),\ y = \frac{1}{3}b\sin C\right)$ donne deux équations d'où l'on tire immédiatement

$$E_1 = \frac{a^2}{b\sin C}, \quad B_1 = \frac{\frac{a^2}{4} - \left(b\cos C - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2\sin^2 C - a^2}{b\sin C\left(b\cos C - \frac{a}{2}\right)},$$

et, en se servant des relations et notations connues,

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2, \qquad 2ab\sin C = \sqrt{2n^4 - p^4}$$
$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad n^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2,$$
$$p^4 = a^4 + b^4 + c^4,$$

l'on trouve facilement

$$E_1 = \frac{2a^3}{\sqrt{2n^4 - p^4}} \qquad B_1 = \frac{2n^4 - 2p^4 - 2a^4 + 2b^2c^2}{(b^2 - c^2)\sqrt{2n^4 - p^4}}.$$

Les coordonnées du centre de l'hyperbole étant x_1, y_1, les asymptotes ont pour équations

$$y - y_1 = m'(x - x_1), \qquad y - y_1 = m''(x - x_1),$$

m' et m'' désignant les racines de l'équation

$$m^2 - B_1 m - 1 = 0.$$

Les distances du point B $\left(x = \frac{a}{2}, y = 0\right)$ à ces deux droites étant représentées par δ_1 et δ_2, l'on en déduit, pour le carré du paramètre,

$$\delta_1\delta_2 = K^2 = \frac{y_1^2 - B_1x_1y_1 - x_1^2 + ax_1 + \frac{B_1ay_1}{2} - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{4 + B_1^2}}$$

ou

$$K^2 = \frac{E_1^2 - \frac{a^2(4 + B_1^2)}{4}}{(4 + B_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\sqrt{2n^4 - p^4}}{16(p^4 - n^4)\sqrt{p^4 - n^4}},$$

fonction symétrique des côtés du triangle.

Lorsque le triangle est isoscèle, le paramètre devient nul; en d'autres termes, l'hyperbole (Γ) se réduit à ses deux asymptotes, la base du triangle et la hauteur correspondante.

Il n'y a pas d'intérêt à développer le numérateur. Cependant on pourra remarquer les identités

$$\begin{aligned}(c^2-a^2)(a^2-b^2)(b^2-c^2) &= a^2(b^4-c^4)+b^2(c^4-a^4)+c^2(a^4-b^4)\\ &= a^4(c^2-b^2)+b^4(a^2-c^2)+c^4(b^2-a^2).\end{aligned}$$

Nota. — Le fait de la proportionnalité des coordonnées des points A et E explique la facilité de réduction que nous avons rencontrée dans l'analyse de ce problème.

La même recherche essayée pour les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC et passant par un des points tels que O, I, K, Z, S, D', ... définis dans les notices précédentes, conduirait à des calculs très pénibles et pour ainsi dire inextricables.

Le plus simple de tous ces paramètres est donc celui que

nous venons d'obtenir pour l'hyperbole (Γ) des neuf points.

L'on pourra s'exercer à retrouver les mêmes résultats en se servant des coordonnées des points D, S' et Z'. Pour l'orthocentre H commun à toutes les hyperboles équilatères, circonscrites au triangle, le paramètre est nécessairement indéterminé (et au contraire on est obligé de se le donner); mais alors on remplacera le point H par le point N diamétralement opposé sur l'hyperbole (Γ) et l'on devra retrouver le même paramètre.

Notes diverses.

I. — Distances des points O et H aux côtés du triangle :

$$\delta O_a = \frac{a}{2} \cot A, \quad \delta H_a = \frac{a}{\sin A} \cos B \cos C;$$

donc

$$\delta O_a \cdot \delta A_a = C^{te},$$

ce qui donne la signification géométrique du produit $\cos A \cos B \cos C$:

$$\delta O_a \cdot \delta H_a = \frac{D^2}{2} \cos A \cos B \cos C.$$

II. — Longueur de la ligne OH. — On trouve, après quelques réductions faciles,

$$\overline{OH}^2 = \frac{b^2}{4 \sin^2 B} [(3 \cos B \cos C - \sin B \sin C)^2 + \sin^2 (B - C)]$$

ou

$$\overline{OH}^2 = \frac{D^2}{4} (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$
$$= \frac{9a^2b^2c^2 - m^2(2n^4 - p^4)}{2n^4 - p^4}.$$

III. — Point n de rencontre des lignes qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés avec le cercle inscrit.

Soient I le centre du cercle inscrit, I' sa projection sur le côté a, B'C' les projections de I' sur les côtés b et c. La droite An a pour équation

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{I'B'}{I'C'}.$$

Or, $IF' = \frac{S}{P}$; $IB = \frac{S}{P}\cot\frac{B}{2}$; $IC = \frac{S}{P}\cot\frac{C}{2}$; $IB' = \frac{2S}{P}\cos^2\frac{C}{2}$;
$IC' = \frac{2S}{P}\cos^2\frac{B}{2}$; donc,

$$\alpha \cos^2\frac{A}{2} = \beta \cos^2\frac{B}{2} = \gamma \cos^2\frac{C}{2} = K$$

avec

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

On en déduit, par exemple,

$$\alpha = \delta n_a = \frac{4S^3}{abc(2P^2 - m^2)} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Les distances de ce point n aux côtés sont donc inversement proportionnelles aux carrés des cosinus des demi-angles opposés.

IV. — Point M de rencontre des droites BN' qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec les cercles ex-inscrits correspondants.

Soit i' le centre du cercle ex-inscrit tangent en N' au côté b. L'on a

$$\alpha = N'C \sin C;\ \gamma = N'A \sin A;\ i'N' = \frac{S}{P-b};$$

$$N'C = N'i' \operatorname{tg}\frac{C}{2};\ N'A = N'i' \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Donc

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a(P-c)}{c(P-a)},$$

d'où

$$\frac{\alpha a}{P-a} = \frac{\beta b}{P-b} = \frac{\gamma c}{P-c} = K$$

avec

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

On en déduit, par exemple,

$$\alpha = \delta M_a = \frac{2S(P-a)}{Pa}.$$

Ce point remarquable paraît avoir été signalé pour la première fois par Hochheim. (*Archives de Grunert*, t. LII, 1871.)

On reconnaît très facilement que ce point est situé sur la ligne EI, et qu'en outre EM = 2 . EI.

En effet,

$$E_a = \frac{2S}{3a}, \quad I_a = \frac{2S}{2P}, \quad M_a = \frac{2S(P-a)}{Pa};$$

d'où

$$\frac{M-E}{E-I} = \frac{\frac{P-a}{Pa} - \frac{1}{3a}}{\frac{1}{3a} - \frac{1}{2P}} = 2\,\frac{3P-3a-P}{2P-3a} = 2.$$

V. — Comme exercice de calcul, on peut se donner l'hyperbole équilatère

$$xy = \mu\nu = \pi\chi,$$

$(\mu,\nu)(\pi,\chi)$ représentant deux points E et H de la courbe, et se proposer de déterminer, entres autres, les points O, *o*, D, S, D', K, qui doivent donc avoir, par rapport au triangle *inconnu* ABC, les situations indiquées dans le cours de ces recherches. C'est ainsi que l'on trouve, par exemple, pour les points précités :

O	$x = \frac{3\mu - \pi}{2}$	$y = \frac{3\nu - \chi}{2}$
o	$x = \frac{3\mu + \pi}{4}$	$y = \frac{3\nu + \chi}{4}$
D	$x = \chi\frac{3\mu + \pi}{3\nu + \chi}$	$y = \pi\frac{3\nu + \chi}{3\mu + \pi}$
S	$x = \frac{4\mu\nu}{3\nu + \chi}$	$y = \frac{4\mu\nu}{3\mu + \pi}$
D'	$x = \frac{8\mu\nu\pi}{2\mu\nu + 3\pi\nu + 3\mu\chi}$	$y = \frac{8\mu\nu\chi}{2\mu\nu + 3\pi\nu + 3\mu\chi}$
K	$x = \frac{2\mu\nu(\nu + \pi)}{2\mu\nu + \mu\chi + \pi\nu}$	$y = \frac{2\mu\nu(\mu + \chi)}{2\mu\nu + \mu\chi + \pi\nu}$

La détermination des autres points S', Z, Z', ... devient beaucoup plus compliquée.

VI. — Tangentes des 8 premiers multiples de l'angle α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2n^4 - p^4}}{m^2} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{p^4}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{p^4 + n^4}{p^4 - n^4}\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}4\alpha = \frac{p^8}{p^8 - 2n^8}\operatorname{tg}2\alpha$$

$$\operatorname{tg}5\alpha = \frac{p^8 - n^8 + n^4p^4}{p^8 - n^8 - n^4p^4}\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}6\alpha = \frac{p^8 - n^8}{p^8 - 3n^8}\operatorname{tg}2\alpha$$

$$\operatorname{tg}7\alpha = \frac{p^{12} + n^4p^8 - 2n^8p^4 - n^{12}}{n^4(n^8 - 2p^8 - 2p^4n^4)}\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}8\alpha = \frac{p^8(p^8 - 2n^8)}{p^{16} + 2n^{16} - 4n^8p^8}\operatorname{tg}2\alpha$$

VII. — Distance du centre du cercle des neuf points aux côtés du triangle. — Ce centre est le milieu de OH. Or, $O_a = \frac{D}{2}\cos A$, et $H_a = D\cos B\cos C$. On en déduit

$$\left(\frac{O + H}{2}\right)a = \frac{D}{4}\cos(B - C).$$

Dans tout ce qui précède, on a posé, pour abréger :

$$a + b + c = 2P, \quad a^2 + b^2 + c^2 = m^2,$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = n^4, \quad a^4 + b^4 + c^4 = p^4.$$

Ces notations sont extrêmement avantageuses et l'on a pu voir combien elles donnent de symétrie et de clarté aux formules et de facilité aux recherches. Nous la recommandons aux géomètres qui voudront porter leur curiosité sur cet intéressant sujet d'études.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DES POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ EN SOMMES DE CARRÉS

Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 185.)

Théorème. — *Pour qu'un polynôme homogène du second degré à* n *variables soit décomposable en* p *carrés, il faut et il suffit que le déterminant de ses dérivées partielles et ses mineurs jusqu'à l'ordre* n — p — 1 *inclusivement soient nuls à la fois.*

Supposons le polynôme réduit à une somme de p carrés,

$$f = P_1^2 + P_2^2 + \dots P_p^2$$

On a

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ P_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} f'x_1 = a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \ldots + a_{p1}P_p$$

$$\frac{1}{2} f'x_2 = a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + \ldots + a_{p2}P_p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} f'x_n = a_{1n}P_1 + a_{2n}P_2 + \ldots + a_{pn}P_p$$

Le déterminant des dérivées partielles est donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{p1}^2 & a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + \ldots + a_{p1}a_{p2} & \ldots & a_{11}a_{1n} + a_{21}a_{2n} + \ldots + a_{p1}a_{pn} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + \ldots + a_{p2}a_{p1} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{p2}^2 & \ldots & a_{12}a_{1n} + a_{22}a_{2n} + \ldots + a_{p2}a_{pn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}a_{11} + a_{2n}a_{21} + \ldots + a_{pn}a_{p1} & a_{1n}a_{12} + a_{2n}a_{22} + \ldots + a_{pn}a_{p2} & \ldots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \ldots + a_{pn}^2 \end{vmatrix}$$

Il se compose de p^n déterminants partiels; une colonne quelconque d'un de ces déterminants se compose des coefficients d'une des fonctions P_1, P_2 ... ou P_p multipliés par un facteur constant. Ils sont donc tous nuls, car ils ont tous n colonnes et il n'y a que p colonnes distinctes (abstraction faite des facteurs communs). Ainsi Δ est nul. De même tous ses mineurs composés de plus de p colonnes sont nuls pour la même raison. Les mineurs différents de zéro auront au plus p colonnes et seront de l'ordre $n - p$.

Réciproquement, supposons que Δ soit nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $n - p - 1$ inclusivement; je dis que le polynôme se réduira à une somme de p carrés.

Soit

$$f = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2.$$

Le déterminant Δ des premières dérivées sera évidemment le carré de

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

puisque $\Delta = 0$, on a aussi $D = 0$.

Si l'on considère un des mineurs principaux de Δ, dont l'ordre soit au plus $n - p - 1$, il résulte du lemme I qu'il est égal à la somme des carrés des mineurs de D que l'on peut former avec les éléments des lignes et colonnes de même rang que celles du mineur principal en question ; donc tous ces mineurs de D sont nuls. Mais D n'est autre chose que le déterminant des n fonctions linéaires $P_1, P_2, \ldots P_n$; puisqu'il est nul ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $n - p - 1$ inclusivement, il résulte du théorème I que $n - p$ de ces fonctions linéaires peuvent s'exprimer en fonction linéaire des p autres, et par suite le polynôme f se réduit à une somme de p carrés.

Lorsqu'on applique le théorème précédent aux polynômes homogènes à trois et à quatre variables, on trouve tout d'abord pour leur réduction à un ou deux carrés un nombre de conditions supérieur à celui qu'indique la géométrie analytique.

Ainsi, pour qu'une surface du second ordre se réduise à deux plans, il faut trois conditions. D'autre part, pour que le polynôme à quatre variables se réduise à deux carrés, le déterminant de ses dérivées partielles doit être nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre, et il y a dix mineurs distincts; mais les conditions auxquelles on arrive en les égalant à zéro ne sont pas *toutes distinctes*. Je vais les étudier en détail.

Je remarque en premier lieu que le déterminant d'un polynôme à n variables est symétrique ; on peut donc lui appliquer la formule (5). Si D est nul ainsi que D_{pp}, on aura aussi $D_{pq} = 0$, quel que soit q. Il suffit donc qu'un mineur principal D_{pp} soit nul, pour que tous les mineurs relatifs aux éléments de la première ligne ou colonne le soient aussi. Cette remarque faite, je considère le polynôme

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4.$$

Son déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \text{où } a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13}, \text{ etc.}$$

Les dix mineurs du premier ordre sont les quatre mineurs principaux D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44} et en outre D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{23}, D_{24}, D_{34}.

Les mineurs du second ordre sont au nombre de trente, savoir :

$$d^{22}_{11} = d^{21}_{12},\ d^{33}_{11} = d^{31}_{11},\ d^{44}_{11} = d^{41}_{14},\ d^{33}_{22} = d^{32}_{23},\ d^{44}_{22} = d^{42}_{24},\ d^{44}_{33} = d^{43}_{34},$$

$$\begin{array}{ll} d^{23}_{11} = d^{21}_{13} = d^{31}_{12} & d^{12}_{33} = d^{23}_{31} = d^{13}_{32} \\ d^{24}_{11} = d^{41}_{12} = d^{21}_{14} & d^{14}_{33} = d^{43}_{31} = d^{13}_{34} \\ d^{34}_{11} = d^{41}_{13} = d^{31}_{14} & d^{24}_{33} = d^{43}_{32} = d^{23}_{34} \\ d^{13}_{22} = d^{32}_{21} = d^{12}_{23} & d^{12}_{44} = d^{24}_{41} = d^{14}_{42} \\ d^{14}_{22} = d^{42}_{21} = d^{12}_{24} & d^{13}_{44} = d^{34}_{41} = d^{14}_{43} \\ d^{34}_{22} = d^{42}_{23} = d^{32}_{24} & d^{23}_{44} = d^{34}_{42} = d^{24}_{43} \end{array}$$

Les six premiers de ce tableau sont les mineurs principaux du second ordre; ils entrent dans la composition de D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44} ainsi que les douze suivants.

Il faut ajouter

$$d^{34}_{12},\ d^{43}_{12},\ d^{24}_{13}.\ d^{42}_{13},\ d^{23}_{14},\ d^{32}_{14},\ d^{14}_{23},\ d^{41}_{23},\ d^{13}_{24},\ d^{31}_{24},\ d^{12}_{34},\ d^{21}_{34}.$$

Je suppose que l'on ait

$$D = 0,\quad D_{44} = 0,\quad D_{33} = 0,$$

ce qui donne déjà

$$D_{14} = 0,\ D_{24} = 0,\ D_{34} = 0,\ D_{13} = 0,\ D_{23} = 0.$$

Je dis qu'on aura aussi

$$D_{22} = 0,\quad D_{11} = 0$$

et pour le prouver je vais exprimer D au moyen des mineurs du second ordre.

On a

$$D\ .\ d^{33}_{44} = D_{33}D_{44} - (D_{34})^2$$

et aussi, en appliquant la formule (5) à D_{33} et à D_{44} :

$$D_{33}\ .\ a_{11} = d^{22}_{33}d^{44}_{33} - (d^{24}_{33})^2,\quad D_{44}a_{11} = d^{22}_{44}d^{33}_{44} - (d^{23}_{44})^2.$$

De plus, en vertu de la formule (4) :

$$D_{34}a_{11} = d^{22}_{34}d^{43}_{34} - d^{23}_{34}d^{42}_{34} = d^{34}_{22}d^{44}_{33} - d^{24}_{33}d^{23}_{44}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression de D donne, en supprimant le facteur commun d^{44}_{33},

$$a^2_{11}D = d^{44}_{33}[d^{33}_{22}d^{44}_{22} - (d^{34}_{22})^2] - d^{23}_{44}[d^{33}_{22}d^{33}_{44} - d^{34}_{22}d^{24}_{33}] - d^{24}_{33}[d^{44}_{22}d^{24}_{33} - d^{34}_{22}d^{23}_{44}].$$

Mais on a

$$d^{23}_{22}d^{44}_{22} - (d^{34}_{22})^2 = a_{11}D_{22}$$

$$d^{33}_{22}d^{23}_{44} - d^{34}_{22}d^{24}_{33} = d^{32}_{23}d^{44}_{23} - d^{42}_{23}d^{34}_{23} = a_{11}D_{23}$$

$$d^{44}_{22}d^{24}_{33} - d^{34}_{22}d^{23}_{44} = d^{42}_{24}d^{33}_{24} - d^{32}_{24}d^{43}_{24} = -a_{11}D_{24}$$

Il reste donc

$$a_{11}D = d_{33}^{44}D_{22} - d_{44}^{23}D_{23} + d_{33}^{24}D_{24}.$$

Comme on a déjà

$$D = o, \quad D_{23} = o, \quad D_{23} = o,$$

il en résulte $d_{33}^{44}D_{22} = o$ et si d_{33}^{44} est différent de zéro, D_{22} sera nul, par suite aussi D_{12}.

On démontrerait de même la relation

$$a_{22}D = d_{33}^{44}D_{11} - d_{44}^{13}D_{13} + d_{33}^{14}D_{14}$$

qui entraîne $D_{11} = o$, en supposant toujours $d_{44}^{33} \gtrless o$.

Il résulte de ce qui précède que si $D = o$ et si l'un au moins des mineurs principaux du second ordre d_{pp}^{q} n'est pas nul, il suffit que deux des mineurs principaux du premier ordre, savoir D_{pp} et D_{qq}, soient nuls, pour que tous les autres le soient.

— La conclusion est en défaut lorsque tous les mineurs de la forme d_{pp}^{qq} sont nuls à la fois. Je dis que dans ce cas la nullité d'un des mineurs principaux du premier ordre entraîne celle du déterminant D.

Soit par exemple $D_{44} = o$. On a

$$D \cdot d_{44}^{33} = D_{44}D_{33} - (D_{34})^2;$$

puisque $d_{44}^{33} = o$ et $D_{44} = o$, on en conclut $D_{34} = o$.

De même

$$D \cdot d_{44}^{22} = D_{44} \cdot D_{22} - (D_{24})^2;$$

donc

$$D_{24} = o;$$

puis

$$a_{11} \cdot D_{44} = d_{44}^{22}d_{44}^{33} - (d_{44}^{23})^2$$

et par suite,

$$d_{44}^{23} = o.$$

Enfin l'équation

$$a_{11}D = d_{33}^{44}D_{22} - d_{44}^{23}D_{23} + d_{33}^{24}D_{24}$$

fait voir que si a_{11} n'est pas nul, D est nul.

Ajoutons maintenant les conditions $D_{33} = o$, $D_{22} = o$; on conclura du développement

$$D = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots$$

que D_{11} doit être nul, car on sait déjà que $D_{12} = o$, $D_{13} = o$, $D_{14} = o$, à cause de $D = o$, $D_{22} = o$, $D_{33} = o$, $D_{44} = o$.

— Reste à examiner le cas où a_{11} serait nul en même temps que les mineurs principaux du second ordre.

Alors de l'égalité $d_{22}^{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, on conclut $a_{12} = 0$, de même $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$. Le polynôme n'a plus que trois variables x_2, x_3 et x_4. Pour qu'il se réduise à deux carrés, il suffit que l'on ait $D_{11} = 0$; au reste, comme on a en outre $d_{11}^{22} = 0$, $d_{11}^{33} = 0$, $d_{11}^{44} = 0$, il est facile de voir que ce polynôme à trois variables se réduit à un seul carré.

En résumé, pour que le polynôme à quatre variables soit une somme de deux carrés, trois conditions sont toujours suffisantes.

1° Si l'un au moins des mineurs du second ordre d_{pp}^{qq} n'est pas nul, il suffira que l'on ait

$$D = 0, \quad D_{pp} = 0, \quad D_{qq} = 0.$$

2° Si tous les mineurs principaux du second ordre sont nuls, il suffit que trois des mineurs principaux du premier ordre le soient.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1884)

(*Suite*, voir p. 161.)

33. — Trouver la surface podaire Σ d'un ellipsoïde E; les normales aux plans tangents étant abaissées du centre O, démontrer que Σ est la transformée par rayons recteurs réciproques d'un certain ellipsoïde E′ ayant les mêmes plans principaux que E, le pôle d'inversion étant au point O.

34. — On donne une conique à centre et deux diamètres conjugués mobiles; trouver :

1° L'équation générale des hyperboles équilatères H qui passent par les extrémités de ces diamètres;

2° Déduire le lieu des foyers de H du lieu décrit par le sommet réel.

35. — On donne les dimensions (*) d'une conique pas-

(*) C'est-à-dire la *grandeur* des axes.

sant par deux points fixes A, B; trouver le lieu des points communs à cette conique et à la polaire d'un point fixe P.

36. — On donne quatre points fixes A, B, C, D et on demande le lieu des points M tels que les droites joignant ce point aux points fixes forment un faisceau harmonique.

37. — Lieu décrit par les droites Δ qui font avec deux droites fixes OA, OB, des angles dont la somme est constante.

38. — Résoudre l'équation

$$27(x-1)^3+8(x+1)^3=0;$$

et la suivante

$$(x+2)^3+8(x-1)^3=0.$$

39. — On considère dans une conique deux cordes AB, A'B', conjuguées, c'est-à-dire, telles que le pôle de l'une soit situé sur l'autre; démontrer que les extrémités et les pôles de ces deux cordes appartiennent à la même conique.

40. — On donne deux droites fixes Δ, Δ'; sur Δ deux points fixes P, Q; sur Δ' un troisième point fixe R.

Cela posé, de part et d'autre du point R on prend deux points variables β, β', équidistants de R et l'on mène les droites Pβ, Qβ', qui se rencontrent en un point I.

Trouver le lieu du point I.

41. — Trouver la dérivée de

$$y=\text{arc sin}\left(\frac{1}{\cos x}\right). \qquad (?)$$

42. — Par un point fixe on mène des transversales à une surface du second ordre donnée; trouver le lieu des milieux des cordes ainsi obtenues. Peut-on prévoir à priori le degré de l'équation à laquelle on doit aboutir?

43. — On donne l'équation

$$x^3+px+q=0,$$

trouver l'équation transformée au moyen de la formule

$$y=\frac{a^2}{(b+1)(c+1)},$$

a, b, c, désignant les trois racines de l'équation donnée.

44. — Construire les courbes qui sont représentées respectivement par les équations :

$$1^\circ \; y^2 - 2xy + x^4 = 0,$$
$$2^\circ \; xy(x + y) + x^2 + y^2 = 0,$$
$$3^\circ \; (x + y)(x^2 + y^2) + y - x = 0,$$
$$4^\circ \; 2x^3 + y^3 - 3y = 0.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

145. — On considère l'une des surfaces du second ordre qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et un plan. La section est une conique dont on demande les foyers. — Lieu de ces foyers quand la surface change; lieu des foyers lorsque la surface restant la même, le plan se déplace parallèlement à lui-même. *(E. Amigues.)*

146. — On considère la courbe Γ qui correspond à l'équation

$$ay^2 = x^3.$$

Ayant pris sur l'axe de cette courbe un point P, sur OP comme diamètre (O est le point de rebroussement de Γ), on décrit un cercle Δ qui coupe Γ en un point M; la tangente à Γ en ce point M coupe Δ en un point I. Vérifier que le lieu décrit par ce point I est la courbe unicursale qui correspond aux formules :

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4 + 9t^2}; \quad -\frac{y}{a} = \frac{t^3(2 + 3t^2)}{4 + 9t^2}.$$

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER, — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 21434-4.

REPRÉSENTATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 193.)

4. Principe de la transformation omaloïdale. — Pour nous borner, et aussi pour éviter toute confusion, nous viserons uniquement dans ce qui va suivre l'ellipsoïde. De plus, les axes ωt, $\omega\theta$ seront supposés rectangulaires.

Dans cette manière de voir : à l'ellipsoïde E correspond un plan Π ; et, pour le distinguer des autres plans, nous l'appellerons *plan fondamental* de la transformation. Si un point M décrit, sur E, une certaine courbe Γ, le point correspondant m décrit, sur le plan fondamental, une courbe correspondante γ ; et réciproquement.

On comprend donc comment cette représentation plane des surfaces constitue une véritable transformation, permettant de déduire les propriétés de l'espace, de celles du plan.

La simplicité des résultats auxquels conduit cette méthode de transformation résulte, principalement, du théorème suivant qui, dans cette théorie, peut être considéré comme fondamental.

5. Théorème. — *A une ellipse* U *tracée sur l'ellipsoïde* E *correspond un cercle* u *sur le plan* Π ; *le centre* ω *de* U *a pour correspondant sur* E *un point* Ω, *obtenu en cherchant le point d'intersection de* E, *avec la droite qui joint le sommet* A' *au pôle de* U (*).

Soit

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} - \delta = 0, \qquad (1)$$

(*) Par abréviation, nous appelons *pôle d'une section plane* Γ *d'une quadrique* le point par lequel passent tous les plans tangents ayant leurs points de contact sur Γ ; c'est, en d'autres termes, le pôle du plan de la section.

l'équation du plan P sur lequel est placée l'ellipse considérée Γ. Les coordonnées d'un point M mobile sur U vérifient simultanément l'équation (1) et celle de l'ellipsoïde; les coordonnées (t, θ) du point m, point correspondant à M, et mobile sur le plan Π, vérifient donc la relation

$$\alpha(1 - t^2 - \theta^2) + 2\beta t + 2\gamma\theta - \delta(1 + t^2 + \theta^2) = 0, \qquad (u)$$

ou

$$(\delta + \alpha)(t^2 + \theta^2) - 2\beta t - 2\gamma\theta - \delta + \alpha = 0. \qquad (u')$$

Nous reviendrons tout à l'heure sur l'hypothèse : $\delta + \alpha = 0$; supposons, pour l'instant, $\delta + \alpha$ différent de zéro.

L'équation (u') représente alors un cercle; ainsi les ellipses tracées sur l'ellipsoïde se transforment en circonférences sur le plan fondamental.

Démontrons maintenant que le centre ω du cercle (u) a bien pour correspondant, sur E, le point Ω, déterminé comme nous l'avons dit.

A cet effet, remarquons d'abord que les coordonnées (t', θ') de ω sont données par les formules :

$$t' = \frac{\beta}{\alpha + \delta}, \qquad \theta' = \frac{\gamma}{\alpha + \delta}.$$

Soient x', y', z' les coordonnées de Ω, nous avons, conformément aux formules (E),

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'}{a} &= \frac{(\alpha + \delta)^2 - \beta^2 - \gamma^2}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \frac{y'}{b} &= \frac{2\beta(\alpha + \delta)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\ \frac{z'}{c} &= \frac{2\gamma(\alpha + \delta)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Appelons maintenant (x'', y'', z'') les coordonnées du pôle υ de U. Le sommet A' ($-a$, o, o) sera en ligne droite avec les points Ω et υ, si les égalités

$$\frac{x' + a}{x'' + a} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''},$$

sont vérifiées.

Or, nous avons

$$\frac{x''}{a} = \frac{\alpha}{\delta}, \qquad \frac{y''}{b} = \frac{\beta}{\delta}, \qquad \frac{z''}{c} = \frac{\gamma}{\delta}; \qquad (2)$$

et par suite

$$\frac{x'' + a}{a} = \frac{\delta + \alpha}{\delta}.$$

D'ailleurs

$$\frac{x' + a}{a} = \frac{2(\alpha + \delta)^2}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Ces deux dernières égalités donnent, par combinaison,

$$\frac{x' + a}{x'' + a} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

D'autre part, les égalités (1) et (2) prouvent que

$$\frac{y'}{y''} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

et que

$$\frac{z'}{z''} = \frac{2\delta(\delta + \alpha)}{(\alpha + \delta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Les trois rapports:

$$\frac{x' + a}{x'' + a}, \quad \frac{y'}{y''}, \quad \frac{z'}{z''},$$

sont donc égaux; et le théorème énoncé se trouve ainsi établi.

Il nous reste à examiner le cas où l'on a $\delta + \alpha = 0$.

6. Théorème. — *Dans la transformation omaloïdale, les ellipses tracées sur* E, *et passant par le sommet* A', *deviennent des droites sur le plan* Π;

Réciproquement, *toute droite de* Π *provient d'une ellipse de* E, *passant par le sommet* A'.

La première partie résulte immédiatement de l'équation (u); établissons donc la réciproque.

Soit

$$At + B\theta + C = 0, \qquad (1)$$

l'équation d'une droite l du plan Π. Les formules (e), trouvées plus haut,

$$t = \frac{ay}{b(x + a)}, \quad \theta = \frac{az}{c(x + a)},$$

donnent

$$A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C\frac{x + a}{a} = 0. \qquad (1')$$

Ainsi, lorsque le point m du plan Π décrit une droite l de ce plan, le point correspondant M, dans l'espace, a ses coordonnées qui vérifient constamment l'équation de l'ellipsoïde et l'équation (1'). Cette dernière représente l'équation générale des plans passant par le sommet A'; ainsi, à la droite l de Π, correspond sur E une ellipse passant par le sommet A'.

7. Remarques diverses. — Des deux principes généraux qui précèdent on déduit quelques cas particuliers qu'il importe de signaler.

I. — Les sections principales de l'ellipsoïde sont représentées sur Π :

1° YOZ *par un cercle* $(t^2 + \theta^2 = 1)$
2° YOX *par l'axe* ωt $(\theta = 0)$
3° ZOX *par l'axe* $\omega\theta$ $(t = 0)$.

II. — Les sections parallèles aux sections principales sont représentés sur Π :

1° *Celles qui sont parallèles à* YOZ, *par des cercles concentriques à l'origine* ω;

2° *Celles qui sont parallèles à* YOX *par des cercles ayant pour axe radical commun l'axe* ωt;

3° *Enfin, celles qui sont parallèles à* ZOX *sont représentées sur* Π *par des cercles ayant tous pour axe radical* $\omega\theta$.

III. — *Les ellipses passant par les sommets* A *et* A' *sont représentées sur* Π *par des droites passant par l'origine.*

En effet, la relation

$$y = mz,$$

entraîne l'égalité

$$\frac{t}{\theta} = \frac{mc}{b}.$$

IV. — *Les ellipses tracées sur* E *sont sécantes, tangentes, intérieures ou extérieures, en même temps que les cercles correspondants de* Π.

V. — *Aux cercles qui passent par l'origine* ω, *correspondent des ellipses passant par le sommet* A; *et réciproquement.*

En effet, si l'on suppose (§ 5) $\alpha = \delta$, le plan de la section

passe par A et, en même temps, le cercle correspondant passe par ω,

VI. — *Lorsque les ellipses tracées sur* E *ont leurs plans passant par une droite fixe* D, *les cercles correspondants sur* Π, *admettent le même axe radical.*

En effet, la droite D rencontre E, en deux points M′, M″, (réels ou imaginaires). Les cercles correspondants aux ellipses obtenues par des plans sécants passant par D passeront constamment par deux points fixes, savoir les points m' et m'' qui, sur Π, correspondent aux points M′ et M″.

La réciproque est évidemment vraie.

VII. — *Lorsque quatre ellipses* A, B, C, D, *tracées sur* E, *sont situées dans des plans qui concourent en un même point, les cercles correspondants* a, b, c, d, *tracés sur* Π, *ont le même centre radical.*

Supposons, en effet, que le plan d'une ellipse, mobile sur E, passe constamment par un point fixe $(x', y' z')$; nous avons alors

$$\alpha \frac{x'}{a} + \beta \frac{y'}{b} + \gamma \frac{z'}{c} - \delta = 0.$$

L'équation (u), (§ 5), devient

$$\alpha \left\{ 1 - t^2 - \theta^2 - \frac{x'}{a}(1 + t^2 + \theta^2) \right\} + \beta \left\{ 2t - \frac{y'}{b}(1 + t^2 + \theta^2) \right\}$$
$$+ \gamma \left\{ 2\theta - \frac{z'}{c}(1 + t^2 + \theta^2) \right\} = 0.$$

Cette relation a la forme

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0,$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$, représentant des circonférences. Ainsi les cercles qni correspondent aux ellipses dont les plans pivotent autour d'un point fixe, forment un *réseau linéaire.* On sait que, dans ce cas, tous ces cercles coupent orthogonalement un cercle fixe, ou, ce qui revient au même, ont le même centre radical.

VIII. — *A la droite de l'infini du plan* Π, *correspond le sommet* A′ *de l'ellipsoïde* E.

Supposons que t et θ grandissent au delà de toute limite,

en conservant un rapport déterminé K. Les formules (E), en posant

$$t = K\theta,$$

deviennent

$$\frac{x}{a} = \frac{1 - \theta^2(1 + K^2)}{1 + \theta^2(1 + K^2)}, \quad \frac{y}{b} = \frac{K\theta}{1 + \theta^2(1 + K^2)}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\theta}{1 + \theta^2(1 + K^2)}.$$

Lorsque θ croît au delà de toute limite, on a

$$\lim \frac{x}{a} = -1, \quad \lim . y = 0, \quad \lim z = 0,$$

et ceci, *quel que soit* K. Ainsi, à la droite de l'infini correspond le point A′, ou, si l'on préfère, l'ellipse infiniment petite constituée par l'intersection de E avec le plan tangent à l'ellipsoïde au point A′.

IX. — *A deux droites parallèles du plan* Π, *correspondent deux ellipses dont les plans ont pour traces, sur* YOZ, *deux droites parallèles.*

En effet, aux droites qui ont pour équation, respectivement

$$At + B\theta + C = 0, \qquad At + B\theta + C' = 0,$$

correspondent deux plans dont les équations sont

$$A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0, \quad A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C'\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 0.$$

8. Remarque fondamentale. — C'est ici le lieu d'examiner le rôle prépondérant que semble jouer le sommet A′ dans la transformation que nous développons. Nous voulons faire observer ici que cette importance n'est qu'apparente; elle tient uniquement aux formules particulières que nous avons adoptées.

Une transformation homographique, effectuée sur l'ellipsoïde, met le fait que nous venons d'avancer, hors de doute.

Considérons, par exemple, la formule suivante l'une de celles qui correspondent à la transformation homographique que nous imaginons),

$$\frac{X}{a} = \frac{A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + C\frac{z}{c} + D}{M\frac{x}{a} + N\frac{y}{b} + P\frac{z}{c} + Q}.$$

Si nous remplaçons dans cette égalité : $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, par leurs valeurs exprimées au moyen des formules (E), nous voyons immédiatement que nous avons

$$\frac{X}{a} = \frac{U}{\varphi}, \qquad (1)$$

$U = o$, $\varphi = o$, représentant deux cercles dans le système de coordonnées t, θ.

Cette remarque s'applique aux autres formules de la transformation homographique

$$\frac{Y}{b} = \frac{V}{\varphi}, \quad \frac{Z}{c} = \frac{W}{\varphi}. \qquad (2)$$

Ceci posé, si le point (x, y, z) décrit l'ellipsoïde E, ce qui a lieu lorsque t et θ varient arbitrairement, le point correspondant (X, Y, Z) que nous venons de considérer décrit, lui aussi, un ellipsoïde E′, lequel d'après les formules (1) et (2) sera représenté, point par point, sur un plan.

Quant au point A′ de E, il est remplacé sur E′ par un point α' de cette surface; point qui n'est plus un sommet de la surface et qui n'a d'autre particularité que de correspondre, conformément aux formules (1) et (2), à des valeurs infinies des paramètres t, θ; en un mot, c'est le point qui correspond à la droite de l'infini du plan $t\omega\theta$.

Ce point particulier α' est donc, en définitive, *un point quelconque* de l'ellipsoïde considéré E′ ; et sa position sur cette surface dépend, uniquement, des formules que l'on a choisies pour effectuer la transformation omaloïdale de la quadrique. Mais, ces formules une fois prises, la position de α' est bien déterminée et ce point de la propriété caractéristique suivante: *les ellipses qui sont tracées sur la surface et qui passent par α', se transforment en droites sur le plan fondamental.*

Nous distinguerons ce point en l'appelant le *point central* de la transformation considérée.

9. — Un autre point de la quadrique est mis en évidence dans la transformation qui nous occupe; nous voulons par-

ler du sommet A; ou, dans la transformation générale, du point α qui lui correspond homographiquement.

L'importance du sommet A a déjà été observée quand nous avons fait observer (§ 7; V) que les cercles tracés par l'origine ω se transforment en ellipses qui, sur l'ellipsoïde, passent constamment par le sommet A de cette surface.

La propriété suivante met encore en lumière l'importance de ce point A.

(A suivre.)

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Amigues**, professeur au Lycée de Marseille.

---

1. — *Soit* f(x, y) *une fonction entière et homogène de* x *et de* y. *Si cette fonction admet le facteur*

$$(ax + by)^p,$$

ses p *dérivées de l'ordre* (p — 1) *admettent le facteur*

$$ax + by.$$

Ce théorème résulte de ce fait que si toutes les dérivées d'un certain ordre contiennent ce facteur à la puissance h, toutes les dérivées de l'ordre suivant le contiennent à la puissance $h - 1$.

2. — Réciproquement si l'on a une fonction entière et homogène de x et de y, $f(x, y)$, et que les p dérivées de l'ordre $p - 1$ contiennent le facteur

$$ax + by,$$

la fonction $f(x, y)$ admet le facteur

$$(ax + by)^p.$$

Ici, encore, il suffit de prouver que, si toutes les dérivées d'un certain ordre admettent le facteur

$$(ax + by)^h,$$

toutes les dérivées de l'ordre précédent admettent le facteur

$$(ax + by)^{h+1}.$$

A cet effet, soit $\varphi(x, y)$ une de ces dérivées de l'ordre

précédent. On a par hypothèse,

$$\varphi'_x(x,y) = (ax + by)^h P$$
$$\varphi'(x,y) = (ax + by)^h Q.$$

P et Q étant des polynômes homogènes en x et y.

Si k est le degré de la fonction φ, l'identité d'Euler est

$$k\varphi(x,y) = x\varphi'_x(x,y) + y\varphi'_y(x,y),$$

et elle donne ici

$$k\varphi(x,y) = (ax + by)^h(Px + Qy).$$

Il s'agit donc de prouver que l'expression

$$Px + Qy$$

admet le facteur $(ax + by)$.

Pour cela, on remarque que l'on a

$$\varphi''_{xy}(x,y) = hP(ax + by)^{h-1}b + (ax + by)^h P'_y,$$
$$\varphi''_{yx}(x,y) = hQ(ax + by)^{h-1}a + (ax + by)^h Q'_x.$$

Se servant alors de la formule

$$\varphi''_{xy} = \varphi''_{yx},$$

dont la légitimité, *quant aux polynômes*, est incontestable, on a

$$hP(ax + by)^{h-1}b + (ax + by)^h P'_y = hQ(ax + by)^{h-1}a + (ax + by)^h Q'_x.$$

Les facteurs a et b ne sont pas nuls tous deux : supposons que a soit différent de zéro. Alors, de l'identité ci-dessus on tire

$$Q = \frac{b}{a} P + (ax + by)R,$$

R étant un polynôme homogène en x et y.

D'après cette valeur de Q, on a

$$Px + Qy = Px + \frac{b}{a} Py + (ax + by)R;$$

ou

$$a(Px + Qy) = (P + aRy)(ax + by).$$

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Hadamard (*) *à M. G. de Longchamps.*

... L'avantage de la méthode que j'emploie dans l'étude de l'hypocycloïde, est que la courbe est rapportée, non pas à ses axes de symétrie, mais *à deux tangentes rectangulaires* QUELCONQUES. Elle permet de démontrer avec la plus grande facilité toutes les propriétés que vous m'avez indiquées.

Pour chercher l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères d'un faisceau ponctuel, je prends pour axes les asympotes d'une de ces hyperboles, c'est-à-dire deux tangentes rectangulaires de la courbe. Alors l'équation générale des coniques du faisceau est

$$x^2 - y^2 + 2kxy + 2gx + 2fy + c + kc' = 0.$$

En exprimant qu'une droite coupe une de ces courbes en deux points à l'infini, on obtient l'équation de cette droite en fonction de son coefficient angulaire

$$\lambda^3 x - \lambda^2(y - 2f) + \lambda(x + 2g) - y = 0. \qquad (1)$$

En prenant les dérivées du premier membre de cette équation par rapport à λ et à la variable d'homogénéité, on a les équations

$$3\lambda^2 x - 2\lambda(y - 2f) + (x + 2g) = 0 \qquad (2)$$

$$-\lambda^2(y - 2f) + 2\lambda(x + 2g) - 3y = 0. \qquad (3)$$

L'élimination de λ entre ces équations donne l'équation de la courbe

$$(2fg + fx - gy + 4xy)^2$$
$$= [(x+2g)^2 + 3y(2f-y)][(y-2f)^2 - 3x(x+2g)]. \quad (4)$$

Cette équation représente une hypocycloïde à trois rebroussements.

Pour le voir nous poserons

$$x = -\frac{g}{2} + \rho\cos\omega \qquad y = \frac{f}{2} + \rho\sin\omega.$$

(*) Reçu le premier à l'École Polytechnique et à l'École Normale.

L'équation devient

$$[4\rho^2 \cos\omega \sin\omega + 3f\rho\cos\omega - 3g\rho\sin\omega]^2 =$$

$$[\rho^2(1 - 4\sin^2\omega) + 3\rho(f\sin\omega + g\cos\omega) + \frac{g}{4}(f^2 + g^2)] \times$$

$$[\rho^2(1 - 4\cos^2\omega) - 3\rho(f\sin\omega + g\cos\omega) + \frac{g}{4}(f^2 + g^2)]$$

ou en ordonnant par rapport à ρ et divisant par 3

$$\rho^4 + 4\rho^3[(f\sin\omega + g\cos\omega)\cos 2\omega - (g\sin\omega - f\cos\omega)\sin 2\omega]$$
$$+ \frac{g}{2}\rho^2(f^2 + g^2) - \frac{3^3}{2^4}(f^2 + g^2)^2 = 0.$$

Ce qui, en posant

$$f = 2r\sin 3\alpha \quad g = 2r\cos 3\alpha,$$

d'où

$$\frac{f}{g} = \operatorname{tg} 3\alpha \qquad (5)$$

$$\sqrt{f^2 + g^2} = 2r, \qquad (6)$$

donne l'équation polaire de l'hypocycloïde, où ω est remplacé par $\omega - \alpha$. Le cercle inscrit est le cercle décrit du point $\left(-\frac{g}{2}, \frac{f}{2}\right)$ comme centre avec un rayon égal à $\frac{\sqrt{f^2 + g^2}}{2}$.

Il a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 + gx - fy = 0.$$

C'est précisément l'équation du lieu des centres des hyperboles du faisceau; ce qui démontre que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde est le cercle inscrit.

Pour avoir les valeurs de x et de y en fonction de λ, il suffit de résoudre les équations (2) et (3). Celles-ci donnent :

$$x = 2\,\frac{g\lambda^2 - 2f\lambda - g}{(\lambda^2 + 1)^2} \quad y = 2\,\frac{\lambda^2(f\lambda^2 + 2g\lambda - f)}{(\lambda^2 + 1)^2}. \qquad (7)$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à λ, on a

$$x'_\lambda = -4\frac{g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f}{(\lambda^2 + 1)^3} \quad y'_\lambda = -4\lambda\frac{g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f}{(\lambda^2 + 1)^3}. \qquad (8)$$

Le facteur $g\lambda^3 - 3f\lambda^2 - 3g\lambda + f$, égalé à 0 donne les trois points de rebroussement. On aura donc l'équation de la courbe rapportée à une tangente de rebroussement et à la tangente perpendiculaire en faisant $f = 0$. On voit alors par l'équation (1) que la somme des inclinaisons des tan-

gentes issues d'un point donné sur l'axe des x est égale à un multiple de π; car les tangentes trigonométriques de ces angles satisfont à la relation

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = \lambda'\lambda''\lambda'''.$$

Cherchons maintenant les points d'intersection de la courbe avec l'axe des x. En faisant $y = 0$ dans l'équation (4), on trouve

$$(x + 2g)^2(x^2 + 2gx - f^2) = 0. \qquad (9)$$

Le premier facteur donne le point M de contact, le second les points μ_1 et μ_2. Comme d'ailleurs les points M_2 et M_1 où l'axe des x coupe le cercle inscrit ont respectivement pour abscisses o et $-g$, il en résulte immédiatement les égalités $MM_1 = M_1M_2$, $M\mu_1 = M_2\mu_2$; d'ailleurs, la relation $\mu_1\mu_2 = 4r$ résulte de l'équation (9).

D'ailleurs les λ des points μ_1 et μ_2 sont donnés par l'équation

$$f\lambda^2 + 2g\lambda - f = 0.$$

Les tangentes en ces points sont donc rectangulaires.

Pour trouver leur point d'intersection, il suffit de remarquer qu'elles sont les asymptotes de l'hyperbole

$$x^2 - \frac{2g}{f}xy - y^2 + 2gx + 2fy + c - \frac{g}{f}c' = 0.$$

Le centre de cette hyperbole est donné par les équations

$$x - \frac{g}{f}y + g = 0, \quad -\frac{g}{f}x - y + f = 0,$$

et par suite a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = f.$$

Il est donc sur la tangente perpendiculaire à $\mu_1\mu_2$.

Si dans l'équation (1) nous faisons

$$x = y = 0,$$

nous trouvons, outre

$$\lambda = 0 \text{ et } \lambda = \infty, \quad f\lambda + g = 0.$$

La troisième tangente menée par l'origine a donc pour équation

$$gx - fy = 0.$$

D'ailleurs la tangente au cercle est

$$gx - fy = 0.$$

Ces deux droites sont donc également inclinées sur les axes.

Reprenons la formule (5). Dans cette formule, α est l'angle que fait la droite ωS avec l'axe des x. D'ailleurs la droite ωM_1 fait avec ce même axe l'angle 3α et ωM_2 l'angle -3α. Comme on a :

$$\alpha - (-3\alpha) = 2(3\alpha - \alpha),$$

on a :

$$SM_2 = 2SM_1.$$

Enfin cherchons le rayon de courbure au point M ($\lambda = 0$). Ce rayon de courbure a pour expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

$\frac{dy}{dx}$ est nul et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est égal à $\frac{1}{x'\lambda}$ c'est-à-dire (au signe près), à $\frac{1}{4f}$. Donc le rayon de courbure est égal à $4f$, c'est-à-dire à 8 fois la distance du point ω à la tangente $\mu_1\mu_2$.

Voici maintenant les propriétés que j'ai trouvées en dehors des précédentes.

D'abord les égalités $MM_1 = MM_2$, $\mu_1M_1 = M_1\mu_2$ sont des cas particuliers d'une proposition plus générale, à savoir que *le point* M_1 *est le milieu du segment intercepté sur la tangente en* M *par deux tangentes rectangulaires.*

En effet, faisant dans l'équation (1) $y = 0$, on a

$$x = -2\frac{\lambda f + g}{\lambda^2 + 1}.$$

Si l'on change λ en $-\frac{1}{\lambda}$ on a

$$x' = -2\frac{g\lambda^2 - \lambda f}{\lambda^2 + 1}.$$

La demi-somme de ces valeurs est égale à $-g$.

Prenons alors sur la tangente M_1M_2 un point P. Pour trouver les deux autres tangentes issues de ce point, remarquons que les longueurs PI′, PI″, interceptées sur ces tangentes par la tangente perpendiculaire à M_1M_2 sont divisées en deux parties égales par les points M_1', M_1'' situés sur le

cercle inscrit. Ces points seront donc les points de rencontre de ce cercle avec la perpendiculaire au milieu de PM_2. Mais on verrait de même que M_1M_1', par exemple, est perpendiculaire à PM_1''. Il en résulte que *le point* P *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* $M_1M_1'M_1''$. D'ailleurs, puisque $PM_2 = 2PH$, le triangle $M_2M_2'M_2''$ est homothétique par rapport au point P du triangle HH'H″ formé par les pieds des hauteurs du triangle $M_1M_1'M_1''$; or celui-ci est circonscrit à un cercle de centre I; donc *le point* P *est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle* $M_2M_2'M_2''$.

Considérant maintenant les triangles égaux $PM_1'M_1''$, $M_2M_1'M_1''$, on a

$$PM_1' \cdot PM_1'' = M_2M_1' \cdot M_2M_1'' = 2r \cdot M_2H = r \cdot PM_2 = \frac{pr}{PM_1},$$

p étant la puissance du point P par rapport au cercle. Donc

$$PM_1 \cdot PM_1' \cdot PM_1'' = pr. \qquad (10)$$

On a encore, en désignant par V, V′, V″ les angles que font entre elles les trois tangentes :

$$PM^2 = 2PM_1' \cos V'' \text{ ou } p = 2PM_1 \cdot PM_1' \cos V''$$

ou encore

$$\frac{PM_1''}{\cos V''} = \frac{PM_1}{\cos V} = \frac{PM_1'}{\cos V'} = 2r. \qquad (11)$$

Remarquons maintenant que $M'M_1'' = 2r \sin V$. On a donc

$$\overline{PM_1'}^2 + \overline{PM_1''}^2 - 2PM_1' \cdot PM_1'' \cos V = 4r^2 - 4r^2 \cos^2 V,$$

ou en remplaçant $2PM' \cdot PM_1''$, $\cos V$ et $2r \cos V$ par leurs valeurs :

$$\overline{PM_1}^2 + \overline{PM_1'}^2 + \overline{PM_1''}^2 = 4r^2 + p. \qquad (12)$$

Les longueurs de deux des tangentes issues d'un point à l'hypocloïde donnent deux conditions qui permettent de déterminer le point. Il doit donc exister entre les longueurs des trois tangentes menées par un point à la courbe une relation indépendante de la position du point. Les égalités précédentes vont nous permettre de trouver cette relation. Pour cela, soient α, β, γ les longueurs de ces tangentes, l, l', l'', les longueurs PM_1, PM_1', PM_1''.

On a:

$$ll'l'' = pr, \quad l = 2r \cos V, \quad l' = 2r \cos V', \quad l'' = 2r \cos V''$$

avec

$$\alpha = 2l - \frac{p}{l} \ (*),\ \beta = 2l' - \frac{p}{l'},\ \gamma = 2l'' - \frac{p}{l''}$$

et

$$+ V + V' + V'' = 0.$$

En remplaçant dans la première égalité p, successivement, par $2l^2 - l\alpha$, $2l'^2 - l'\beta$, etc.; on a

$$l'l'' = 2lr - \alpha r, \text{ etc.},$$

ou

$$4r \cos V' \cos V'' = 4r \cos V - \alpha.$$

Mais

$$\cos V = \cos V' \cos V'' - \sin V' \sin V''.$$

Donc

$$\sin V' \sin V'' = \frac{-\alpha}{4r} \quad \sin V'' \sin V = \frac{-\beta}{4r},$$

$$\sin V \sin V' = \frac{-\gamma}{4r}.$$

Or, les angles V, V', V'' ayant une somme nulle, leurs sinus satisfont à la relation

$$\sin^4 V + \sin^4 V' + \sin^4 V'' - 2 \sin^2 V' \sin^2 V'' - 2 \sin^2 V'' \sin^2 V^4$$
$$- 2 \sin^2 V + \sin^2 V' \, 4 \sin^2 V \sin^2 V' \sin^2 V'' = 0.$$

En remplaçant $\sin^2 V$, etc. par $-\dfrac{\beta\gamma}{4r\alpha}$ etc., nous avons

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{\alpha\beta\gamma}{r} = 0.$$

ou encore en multipliant par $\dfrac{r^8}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$,

$$\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{r^2}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^4 - 2\left[\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^2\left(\frac{r^2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{\beta}\right)^2\left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{r^2}{\gamma}\right)^2\left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^2\right] = r \cdot \frac{r^2}{\alpha} \cdot \frac{r^2}{\beta} \cdot \frac{r^2}{\gamma} \text{ (au signe près).}$$

Ce qui s'énonce : *Si l'on forme les troisièmes proportionnelles aux tangentes et au rayon du cercle inscrit, le carré de la surface du triangle qui a les longueurs ainsi obtenues pour côtés*

(*) Au signe près.

est égal au volume du parallélépipède qui a ces mêmes longueurs pour arêtes, multiplié par le seizième du rayon.

Je suis d'ailleurs sur la voie de nouvelles propriétés que j'espère trouver pendant ces vacances et que je vous enverrai.

QUESTION 65

Solution par M. AMAURY DE KERDREL, à Brest.

Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits à tous les triangles polaires conjugués par rapport à une parabole.

(Kœhler.)

Soient ($\alpha\beta$) les coordonnées d'un des sommets d'un triangle polaire conjugué (*) ; on sait qu'à ce sommet correspond une infinité de triangles polaires; il suffit que les deux côtés passant par ($\alpha.\beta$) forment un faisceau harmonique avec les tangentes issues de ce point.

Prenons pour origine le point ($\alpha.\beta$) et pour axes des axes parallèles à ceux de la parabole; l'équation de cette courbe est alors

$$(y + \beta)^2 = 2p(x + a). \qquad (1)$$

La polaire de l'origine est

$$px - \beta y = \beta^2 - 2p\alpha. \qquad (2)$$

Formons une combinaison homogène entre les équations (1) et (2); nous aurons ainsi le faisceau de tangentes issues le ce point: cette combinaison est ici

$$y^2 - \frac{2(px - \beta y)^2}{\beta^2 - 2p\alpha} + \frac{(px - \beta y)^2 \times (\beta^2 - 2p\alpha)}{(\beta^2 - 2p\alpha)^2}.$$

ou

$$x^2 - \frac{2\beta}{p}xy + \frac{2\alpha}{p}y^2 = 0. \qquad (3)$$

L'équation du système de droites formant avec le système (3) un faisceau harmonique est

$$x^2 - \left(\frac{2\alpha + p\lambda}{\beta}\right)xy + \lambda y^2 = 0$$

(*) Par rapport aux axes ordinaires de la parabole.

(λ étant une indéterminée) (Voir *Journal de Mathématiques spéciales*, année 1882, p. 167 et 168).

Soit

$$x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy' = 0$$

l'équation d'un cercle passant par P et pour lequel x' et y' sont les coordonnées du centre.

Formons une combinaison homogène entre l'équation de ce cercle et l'équation (2) et exprimons que nous avons une équation identique à (4), nous aurons ainsi deux relations entre lesquelles il suffira d'éliminer λ pour avoir le lieu cherché. Cette combinaison est

$$x^2 + y^2 - \frac{2(xx' + yy')(px - \beta y)}{\beta^2 - 2p\alpha}$$

ou

$$(\beta^2 - 2p\alpha - 2px')x^2 + 2(\beta x' - py')xy + (\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y')y^2 = 0.$$

En identifiant avec

$$x^2 - \frac{(2\alpha + p\lambda)}{\beta} + \lambda y^2 = 0$$

on a

$$\frac{2\beta x' - 2py'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'} = -\frac{2\alpha + p\lambda}{\beta}$$

et

$$\lambda = \frac{\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'}$$

Éliminant λ on a

$$\frac{\beta^2 - 2p\alpha + 2\beta y'}{\beta^2 - 2p\alpha - 2px'} = -\frac{(2\beta x' - 2py')\beta}{p(\beta^2 - 2p\alpha - 2px')} - \frac{2\alpha}{p}$$

ou encore

$$2x'(\beta^2 - 2p\alpha) + 2\alpha(\beta^2 - 2p\alpha) + p(\beta^2 - 2p\alpha) = 0$$

ou en enlevant le facteur $\beta^2 - 2p\alpha$,

$$x' + \alpha + \frac{p}{2} = 0$$

ou en transportant l'origine au sommet de la parabole

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

Le lieu cherché est donc la directrice.

REMARQUE. — Si le point ($\alpha\beta$) est sur la parabole, le facteur $\beta^2 - 2p\alpha$ est nul; dans ce cas, le cercle se réduira donc à ce point ou à la tangente en ce point. Dans le premier cas, le centre de ce cercle est le point lui-même; dans le second, le centre est à l'infini. Donc, si on tient compte du cas particulier ou $\beta^2 - 2p\alpha = 0$, la parabole proposée et la droite de l'infini font partie du lieu.

Sur la question 65, par M. Koehler.

Nous allons démontrer, en faisant usage des coordonnées trilinéaires, que la directrice d'une parabole passe par le centre du cercle circonscrit à un triangle autopolaire.

Soient *a*, *b*, *c* les côtés du triangle de référence; l'équation d'une conique quelconque conjuguée par rapport à ce triangle est

$$lx^2 + my^2 + nz^2 = 0.$$

On exprimera que cette conique est une parabole en écrivant que la droite à l'infini $ax + by + cz = 0$ est tangente, ce qui donne

$$a^2mn + b^2ln + c^2lm = 0. \qquad (1)$$

Cherchons le foyer; l'équation quadratique des tangentes issues d'un point (α, β, γ) est

$$(lx^2 + my^2 + nz^2)(l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2) - (l\alpha x + m\beta y + n\gamma z)^2 = 0.$$

Cette équation doit pouvoir être identifiée avec celle d'un cercle qui est de la forme

$$(ax + by + cz)(\lambda x + \mu y + \nu z) + ayz + bzx + cxy = 0.$$

On trouve ainsi facilement les conditions suivantes, après l'élimination de λ, μ, ν:

$$\begin{aligned} mn(b\beta + c\gamma)^2 + nlb^2\alpha^2 + lmc^2\alpha^2 \\ = nl(c\gamma + a\alpha)^2 + lmc^2\beta^2 + mna^2\beta^2 \\ = lm(a\alpha + b\beta)^2 + mna^2\gamma^2 + nlb^2\gamma^2 \end{aligned}$$

qui, jointes à la relation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S$ (S étant la surface du triangle de référence) déterminent les coordonnées α, β, γ des foyers.

En tenant compte de la relation (1), les équations de conditions deviennent dans le cas de la parabole

$$mn[(b\beta + c\gamma)^2 - a^2\alpha^2] = nl[(c\gamma + a\alpha)^2 - b^2\beta^2]$$
$$= lm[(a\alpha + b\beta)^2 - e^2\gamma^2]$$

ou

$$mn(b\beta + c\gamma + a\alpha) = nl[c\gamma + a\alpha + b\beta] = lm(a\alpha + b\beta + c\gamma].$$

. On en conclut

$$\frac{\alpha a}{m+n} = \frac{\beta b}{n+l} = \frac{\gamma c}{l+m} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2(l+m+n)} = \frac{S}{l+m+n}$$

La directrice, polaire du foyer, sera

$$\frac{lx}{a}(m+n) + \frac{my}{b}(n+l) + \frac{nz}{c}(l+m = 0.$$

Il est facile de constater que cette droite passe par le centre du cercle circonscrit au triangle de référence, dont les coordonnées sont proportionnelles à cos A, cos B, cos C. En remplaçant dans l'équation précédente x, y, z par cos A, cos B, cos C, et a, b, c par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C, on obtient effectivement

$$l(m + n)\cos A \sin B \sin C + m(n+l)\cos B \sin C \sin A$$
$$+ n(l+m)\cos C \sin A \sin B = mn \sin A (\cos B \sin C$$
$$+ \sin B \cos C) + nl \sin B (\cos C \sin A + \sin C \cos A)$$
$$+ lm \sin C (\cos A \sin B + \sin A \cos B) = mn \sin^2 A$$
$$+ nl \sin^2 B + lm \sin^2 C,$$

expression identiquement nulle en vertu de la relation (1).

QUESTION 89

Solution, par M. H. BIEULES, lycée Saint-Louis.

On considère un cercle Δ, *et l'on prend sur la circonférence un point mobile* M. *Ayant joint ce point aux extrémités d'un diamètre fixe* AB, *du point* M *on abaisse sur* AB *une perpendiculaire* MP, *le cercle décrit de* M *comme centre avec* MP *pour rayon rencontre* MA *en* A′, *et* MB *en* B′. *Le lieu décrit par le point de rencontre de* MP *et de* A′B′ *est une courbe du douzième degré ayant pour points sextuples les points* A *et* B. *On montrera que si* AB *est l'axe des* x, *l'équation peut se résoudre par rap-*

port à y et l'on donnera la forme générale de cette courbe qui est une unicursale. (G. L.)

Je prends AB pour axe des x et le diamètre perpendiculaire pour axe des y. L'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (\Delta)$$

Soient α, β les coordonnées du point M, nous aurons :

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Je transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M :

$$(X + \alpha)^2 + (Y + \beta)^2 - r^2 = 0 \qquad (\Delta)$$

$$Y = -\beta. \qquad (AB)$$

L'équation du faisceau de droites MA, MB est :

$$\beta X^2 - 2\alpha XY - \beta Y^2 = 0.$$

L'équation du cercle M est :

$$X^2 + Y^2 - \beta^2 = 0;$$

soit

$$aX + bY = 1,$$

l'équation de A'B', l'équation du faisceau de droites MA' et MB' est :

$$(1 - a^2\beta^2)X^2 - 2ab\beta^2XY + (1 - b^2\beta^2)Y^2 = 0.$$

J'exprime que les droites MA et MA', MB et MB' se confondent :

$$\frac{\beta}{1 - a^2\beta^2} = \frac{\alpha}{ab\beta^2} = -\frac{\beta}{1 - b^2\beta^2}$$

ou

$$(a^2 + b^2)\beta^2 = 2, \qquad \frac{\alpha}{ab\beta^2} = \frac{-\beta}{1 - b^2\beta^2}.$$

Je reviens aux anciens axes, les coordonnées d'un point du lieu sont déterminées par les équations :

$$x - \alpha = 0,$$

$$b(y - \beta) = 1,$$

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$(a^2 + b^2)\beta^2 = 2,$$

$$\frac{\alpha}{ab\beta^2} = \frac{\beta}{b^2\beta^2 - 1}.$$

J'élimine a entre ces deux dernières équations, j'ai :

$$b^4\beta^4(\alpha^2 + \beta^2) - 2b^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 = 0,$$

ou,

$$b^2\beta^2 = \frac{r \pm \beta}{r}.$$

En sortant dans la seconde équation, j'obtiens :

$$\left(\frac{y-\beta}{\beta}\right)^2 = \frac{r}{r \pm \beta}.$$

L'équation du lieu est donc :

$$\left[\frac{y-\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]^2 = \frac{r}{r \pm \sqrt{r^2-x^2}}.$$

Le lieu est formé de deux courbes du sixième degré. Les points A et B sont des points sextuples de ce lieu. Son équation peut s'écrire :

$$\frac{y-\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r}{r \pm \sqrt{r^2-x^2}}} = \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} \pm \sqrt{r-x}}$$

ou

$$y = \pm \sqrt{r^2-x^2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} \pm \sqrt{r-x}}\right].$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées; x ne peut varier qu'entre $-r$ et $+r$.

Considérons la branche de courbe

$$y = \sqrt{r^2-x^2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} \pm \sqrt{r-x}}\right].$$

Quand x varie de O à r, y varie de $r\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ à O. La tangente au point B est parallèle à l'axe des y, nous avons la branche de courbe DEB.

Considérons la portion de courbe

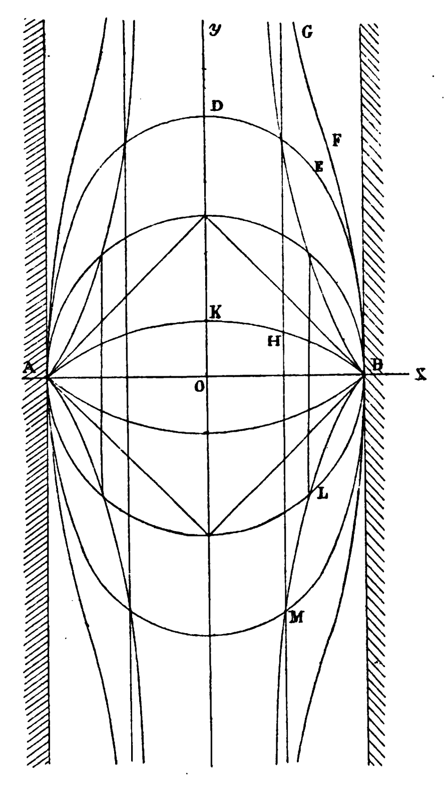
$$y = \sqrt{r^2-x^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{r-x}}\right].$$

Quand x varie de O à r, y varie de $+\infty$ à O, la tangente en B est parallèle à Oy, nous aurons la branche BFG.

Soit

$$y = \sqrt{r^2-x^2}\left[1 - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} + \sqrt{r-x}}\right].$$

Quand x varie de O à R, y varie de $R\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ à O. La tangente en B a pour coefficient angulaire -1, nous avons la branche KHB.



Soit enfin

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\left[1 - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} - \sqrt{r-x}}\right].$$

Quand x varie de O à R, y varie de $-\infty$ à O. La tangente B a pour coefficient angulaire 1. Cette branche de courbe rencontre le cercle au point L de coordonnées :

$$x = R\frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad y = \frac{3R}{4},$$

et la branche de courbe

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}\left[1 + \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{r+x} + \sqrt{r-x}}\right]$$

au point :

$$x = \frac{r}{2}, \qquad y = -\frac{3r}{2}.$$

Nous avons la branche de courbe MLB.

Le reste de la courbe s'obtient par symétrie.

Si nous posons $x = R \cos 2\omega$, nous aurons

$$y = R \sin 2\omega - \frac{R \sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega}$$

et comme

$$\sin \omega = \frac{t - t^2}{t + t^2}$$

$$\cos \omega = \frac{2t}{t + t^2}$$

x et y pourront se mettre sous la forme $\frac{f(t)}{S(t)}$, $f(t)$ et $S(t)$ étant des fonctions rationnelles de t. La courbe est donc une unicursale.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Simonet, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

147. — Un quadrilatère variable OGHM se déplace et se déforme suivant les conditions suivantes :

1° Le point O est fixe;

2° La longueur OG est constante;

3° L'angle G est droit;

4° Le côté HM est à chaque instant parallèle à OG;

5° L'angle GOM varie de grandeur et de position, mais il a toujours la même bissectrice.

Trouver le lieu du sommet M. *(E. V.)*

148. — Construire le lieu unicursal représenté par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{\lambda(1 + \lambda^4)}{(1 + \lambda^2)(1 - \lambda^2)^2}.$$

$$\frac{y}{a} = \frac{2\lambda^2}{(1 + \lambda)^2(1 - \lambda)^2}.$$

(E. V.)

149. — On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy, et un point fixe A; de l'origine O comme centre, avec un rayon variable, on décrit une circonférence Δ, à laquelle on mène par A deux tangentes qui coupent les axes aux points P, Q, P′, Q′. Cela posé, on joint QP′ et PQ′; ces droites se coupent en un point A′. Trouver le lieu de ce point. — On expliquera par des considérations géométriques, le résultat, en apparence singulier, auquel a conduit le calcul. *(G. L.)*

150. — Étant donnés quatre points, A, B, C, D dans un plan, le lieu des points M tels que le faisceau (M . ABCD) soit harmonique, est une conique passant par les quatre points; — 1° soient deux coniques $f = 0$, $\varphi = 0$, se coupant aux points A, B, C, D. Le lieu des points M tels que le faisceau (M . ABCD) soit harmonique, les points A et B étant conjugués, est une conique de la forme $f + m\varphi = 0$. On a de même, en considérant comme conjugués les points A et C, puis A et D, deux autres coniques. Calculer les trois valeurs de m en fonction des trois racines de l'équation en λ; 2° à l'aide de cette expression de m, calculer le rapport anharmonique des points A, B, C, D sur l'une des coniques données. — 3° A l'aide de cette même expression, trouver les valeurs proportionnelles des côtés du triangle qui a pour sommet les projections du point D sur les côtés du triangle ABC.

(Hadamard.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24074-4.

TRANSFORMATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 218.)

10. Théorème. — *Lorsque deux droites* δ, δ', *du plan fondamental sont rectangulaires, les ellipses correspondantes* Δ, Δ', *passent, comme nous l'avons remarqué, par le sommet* A'; *mais elles jouissent encore de la propriété suivante:*

Δ *rencontrant l'ellipse principale du plan* yox *en un point* I *(différent de* A'),

Δ' *rencontrant l'ellipse principale du plan* zox *en un point* J *(différent de* A'),

Enfin, Δ *et* Δ' *se rencontrant en un point* K *(différent de* A');

Le plan IJK *passe constamment par le sommet* A.

Les droites δ et δ' rencontrent les axes ωt, $\omega\theta$ en des points parmi lesquels nous en distinguons deux p, q. Le cercle γ, circonscrit au triangle $p\omega q$, passe par le point de concours m des droites δ, δ'.

Reportons-nous maintenant à l'ellipsoïde E. Aux droites δ, δ' correspondent des ellipses Δ, Δ'; aux points p, q correspondent les points P, Q; enfin le point m est représenté, sur E, par M, point commun aux ellipses Δ et Δ'. La circonférence γ passant par l'origine ω, nous savons (§ 7, rem. V) que l'ellipse correspondante passe par le sommet A. Ainsi, les quatre points A, P, Q, M appartiennent à un même plan.

Cette propriété subsiste après que l'on a effectué une transformation homographique; les ellipses principales que nous venons de considérer sont remplacées par deux ellipses fixes, quelconques d'ailleurs, de la surface; de plus, les sommets A, A' sont représentés, sur l'ellipsoïde nouveau, par les points communs à ces deux ellipses.

Voici encore une propriété qui, elle aussi, subsiste après la transformation homographique.

11. Théorème. — *Si l'on considère quatre points quelconques* (p, q, r, s) *du plan* Π, *et les points correspondants* (P, Q, R, S) *de l'ellipsoïde* E; *si l'on projette ces points en* P′, Q′, R′, S′, *sur le plan* yoz, *le rapport anharmonique des quatre droites* (ωp, ωq, ωr, ωs) *est égal à celui des quatre droites* (OP′, OQ′, OR′, OS′).

En effet les formules (E), ou *(e)*, donnent, entre autres conséquences,

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \cdot \frac{t}{\theta};$$

le coefficient angulaire m de la droite qui joint ω au point (t, θ), est donc lié au coefficient angulaire M de la droite qui, dans le plan yoz, va, de l'origine O au point (y, z), projection du point (x, y, z) sur ce plan, par l'égalité

$$M = \frac{b}{c} m.$$

D'après cela, si l'on imagine une certaine forme homogène entre les coefficients m_1, m_2, ...;

$$f(m_1, m_2, \ldots),$$

en désignant par i son degré d'homogénéité, on aura

$$f(m_1, m_2, \ldots) = \left(\frac{c}{b}\right)^i f(M_1, M_2, \ldots).$$

Le rapport anharmonique étant une fonction homogène, du degré zéro, des nombres m_1, m_2, m_3, m_4, cette égalité établit le théorème énoncé.

On peut observer que si l'on a

$$f(m_1, m_2, \ldots) = 0,$$

on a aussi

$$f(M_1, M_2, \ldots) = 0.$$

Enfin, comme cas particulier du théorème précédent, on remarquera que si quatre points forment une division harmonique dans le plan Π, leurs points correspondants, projetés sur le plan yoz, donnent quatre points qui, joints à l'origine O, forment un faisceau harmonique.

12. Remarque. — Cette proposition permet, dans la transformation omaloïdale, de tenir compte du fait que, sur le plan Π, un pointest situé au milieu de deux autres.

13. — Nous pouvons maintenant montrer quelques applications de cette transformation.

Pour éviter toute confusion, nous raisonnerons toujours sur les formules particulières (E) et (*e*) que nous avons établies plus haut; formules qui mettent en évidence les ellipses principales, et deux sommets, diamétralement opposés, de la quadrique qu'on transforme. Mais on peut toujours généraliser les énoncés trouvés, en imaginant que l'on effectue la transformation homographique dont nous avons parlé (§ 8).

14. Tracé d'ellipses sur un ellipsoïde donné. — L'application qui se présente tout d'abord est relative au tracé des ellipses sur un ellipsoïde donné.

Lorsqu'une ellipse doit être construite sur une surface du second ordre, sa position est déterminée quand on assujettit cette courbe à trois conditions simples; par exemple, on peut demander que l'ellipse passe par certains points ou soit tangente à des ellipses déjà tracées.

Tous ces problèmes se trouvent résolus, par la transformation que nous exposons, au moyen d'une épure faite sur un plan et n'exigeant que le seul emploi de la règle et du compas.

Sans nous arrêter aux détails infinis et sans intérêt que comporteraient l'exposition de ces différents problèmes et leur discussion, prenons simplement, pour faire comprendre notre méthode, le cas où l'on propose de *tracer, sur un ellipsoïde donné, une ellipse tangente à trois ellipses, déjà tracées*. Si elles ne sont pas tracées, nous supposerons que l'on connaît, tout au moins, trois points pour chacune d'elles.

Soient ε_1, ε_2, ε_3 les trois ellipses données, et soit ε l'ellipse qu'il faut construire.

Sur ε_1, on donne au moins trois points, et par ces trois points on peut faire passer un plan dont l'équation se trouve ainsi connue et bien déterminée. En transformant cette équation au moyen des formules (E) on obtient, dans le plan qu'on a choisi pour effectuer l'épure, une circonférence ε_1'.

En répétant cette construction pour les ellipses ε_2, ε_3, on

aura, finalement, dans le plan fondamental, trois circonférences ε_1, ε_2, ε_3, auxquelles on pourra mener, par la construction connue, une circonférence tangente ε'. En prenant sur ε' un point quelconque m (de coordonnées t, θ),les formules (E) permettront de calculer les coordonnées du point correspondant M. On obtiendra donc autant de points que l'on voudra de l'ellipse inconnue ε, et le problème proposé se trouve résolu. La solution, point par point, que nous venons d'indiquer est, croyons-nous, la seule que comporte le problème en question, puisqu'il ne saurait être question d'un tracé continu.

On peut dire, en un mot, que toute la *géométrie ellipsoïdale*, en prenant ce terme dans le sens qui est donné à l'expression analogue *géométrie sphérique*, se trouve résolue par la règle et le compas, et par des constructions planes. Il faut pourtant supposer que les dimensions (a, b, c) de l'ellipsoïde sont données et même, pour la raison que nous allons développer, que *les sommets de la quadrique sont des points marqués sur sa surface.*

15. — Les formules de transformation dont nous faisons usage pour effectuer l'épure sur le plan Π, renferment, non seulement les dimensions de l'ellipsoïde, mais aussi les coordonnées de trois points pris sur l'ellipse que l'on transforme. Si, au point de vue théorique, la solution que nous avons exposée pour un problème particulier, solution qui s'applique visiblement, avec les modifications voulues, à tous les problèmes de la géométrie ellipsoïdale, paraît simple et complète, elle offre pourtant, au point de vue pratique, une difficulté évidente. Cette difficulté, sur laquelle nous allons nous expliquer, tient à ce que la détermination d'un point sur une surface matérielle donnée ne peut se faire par l'emploi de ses coordonnées; et que, réciproquement, un point étant donné ou, pour être plus explicite, étant *marqué* sur une surface matérielle, ses coordonnées ne sont pas, au moins immédiatement, connues.

16. — Imaginons donc un ellipsoïde matériel donné E, et

supposons que ses sommets A, A'; B, B'; C, C', soient marqués sur la surface.

Prenons sur E un point M ; désignons par x, y, z, ses coordonnées relativement aux plans principaux, et par α, α'; β, β'; γ, γ', ses distances aux sommets de la quadrique, distances que l'on peut obtenir, le point M étant marqué sur la surface, au moyen du compas sphérique.

Les relations

$$\alpha^2 = y^2 + z^2 + (a - x)^2,$$
$$\alpha'^2 = y^2 + z^2 + (a + x)^2,$$

donnent

$$4ax = \alpha'^2 - \alpha^2.$$

On trouve de même

$$4by = \beta'^2 - \beta^2,$$
$$4cz = \gamma'^2 - \gamma^2.$$

Dans ces formules α, β, γ désignent les distances du point M aux trois sommets A, B, C, qui forment, avec le centre O, un trièdre tri-rectangle dont les arêtes OA, OB, OC sont supposées représenter les directions positives des axes de coordonnées. Avec cette convention, les formules précédentes sont générales ; elles conviennent à toutes les positions du point M dans l'espace.

Ces formules permettent de construire, par une quatrième proportionnelle, chacune des longueurs x, y, z, quand on a pris les longueurs α, β, γ ; α', β', γ'. D'après cette remarque, la difficulté qui était soulevée, se trouve tournée et nous pouvons dire, comme conclusion de ces explications, que, *étant donné un ellipsoïde matériel dont les six sommets* (*) *sont marqués sur la surface, on peut résoudre, par une épure faite sur un plan, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, tout problème correspondant à l'énoncé suivant :*

Tracer, sur un ellipsoïde, une ellipse remplissant trois conditions analogues à celles-ci : passer par un point de la surface ; ou être tangente à une ellipse déjà tracée.

(*) A la rigueur on pourrait n'en exiger que trois et, de la connaissance des distances α, β, γ, déduire celles des coordonnées ordinaires x, y, z ; mais il est plus simple de supposer, comme nous le faisons, que les six sommets sont marqués.

17. Cas des ellipses centrales. — Appelons ainsi celles qui sont obtenues en coupant l'ellipsoïde par des plans passant par son centre; ces courbes, dans la géométrie ellipsoïdale, correspondent aux grands cercles de la géométrie sphérique. Nous nous proposons d'examiner ce cas particulier des ellipses tracées sur l'ellipsoïde.

Nous avons déjà observé (§ 7, rem. VII), que si le plan d'une ellipse passait constamment par un point fixe, les cercles correspondants étaient orthogonaux à un cercle fixe. Mais il reste à déterminer ce cercle, quand les ellipses sont centrales. Les formules (1) et (u) (§ 5), en supposant $\delta = 0$, donnent 1° l'égalité

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} = 0,$$

pour représenter le plan sécant; 2° l'équation

$$t^2 + \theta^2 - 2\frac{\beta}{\alpha} t - 2\frac{\gamma}{\alpha}\theta - 1 = 0,$$

pour le cercle correspondant à l'ellipse de section.

Lorsque les paramètres α, β, γ varient arbitrairement, tous les cercles qui correspondent à l'équation précédente sont orthogonaux au cercle imaginaire dont l'équation est

$$t^2 + \theta^2 + 1 = 0.$$

Mais on peut substituer à cette condition analytique une propriété géométrique plus saisissable.

Si, dans l'équation (u) (§ 5), après avoir fait $\delta = 0$, on donne à chacun des paramètres variables $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, une valeur quelconque, le cercle correspondant et celui dont l'équation est

$$t^2 + \theta^2 - 1 = 0,$$

ont pour axe radical une droite passant constamment par l'origine ω. En résumé, *les ellipses centrales se transforment en cercles qui coupent un certain cercle fixe* (cercle qui correspond à l'ellipse principale du plan YOX) *en deux points diamétralement opposés.*

On peut dire aussi, si l'on préfère, que ces cercles décrivent sur les axes ωt, $\omega\theta$, des divisions homographiques en involution, dont le point central est ω.

18. — Parmi les ellipses centrales on peut distinguer celles qui passent par deux sommets opposés de la surface.

Nous avons déjà fait remarquer que celles qui passent par les points A et A', se transforment sur le plan fondamental en droites passant par l'origine. En supposant maintenant que l'on ait $\beta = 0$, ou $\gamma = 0$, on voit que les cercles correspondants coupent l'axe ωt, ou l'axe $\omega\theta$, en des points fixes.

(A suivre.)

QUESTION 73

Solution par M. P. Saillard, élève de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal (classe de M. Weill).

On considère un triangle ABC *inscrit dans une parabole et dont l'hypoténuse est une normale de la courbe.*

Trouver le lieu décrit par le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Prenons comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de la parabole.

Considérons (le lecteur est prié de faire la figure) le cercle circonscrit au triangle ABC; il est tangent à la parabole en A et le coupe en B et C; les deux droites AB et AC, cordes communes, doivent donc être également inclinées sur l'axe de la parabole; la bissectrice de l'angle en A est donc la perpendiculaire à l'axe menée par ce point A.

Considérons la bissectrice CP, de l'autre angle aigu du triangle ABC, la somme des angles ABC, ACB étant $\frac{\pi}{2}$, la somme des angles PAC, PCA est $\frac{\pi}{4}$, et l'angle P a pour mesure $\frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire que CP est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy'.

Nous allons mettre, par ces considérations, le problème en équation.

L'équation de la normale en A (x_1y_1) est

$$\frac{y - y_1}{y_1} = \frac{x - x_1}{-p};$$

on calculera facilement les coordonnées du point C qui donnent

$$x = \frac{(p + x_1)^2}{x_1}, \quad y = \frac{2p(p + x_1)}{-y_1};$$

l'équation de CP sera donc

$$\left[y + \frac{2p}{y_1}(x_1 + p)\right] + \left[x - \frac{(p + x_1)^2}{x_1}\right] = 0, \quad (1)$$

en éliminant x_1y_1 entre l'équation (1), l'équation

$$x = y_1,$$

et

$$y_1^2 = 2px_1,$$

on aura l'équation du lieu qui est

$$[xy - 2px - p^2]^2 - (p + x)^2 2px = 0.$$

Interprétation de ce lieu. — Il est à remarquer que la courbe, telle que nous l'avons définie par les remarques précédentes, ne coïncide avec le lieu demandé que dans une partie de son étendue. Le point P ne sera et ne restera le centre du cercle inscrit au triangle ABC, que tant que AC ne sera pas en direction la bissectrice des axes; à partir de ce moment, le point P est le centre d'un cercle ex-inscrit, et ne répond plus à l'énoncé. Donc, il n'y a que pour les positions de P correspondant à une valeur de $y_1 > p$ que l'équation trouvée représentera le lieu.

Construction de ce lieu. — Transportons l'origine au point

$$O' \begin{cases} x = 2p \\ y = 0. \end{cases}$$

L'équation du lieu devient

$$[xy - p^2]^2 - (p + x)^2 2px = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$y = \frac{p^2}{x} \pm (p + x)\sqrt{\frac{2p}{x}}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que l'hyperbole équilatère

$$xy = p^2$$

est une courbe diamétrale, que la courbe proposée est tout entière du côté des x positifs, et qu'elle admet pour asymptote l'axe des y, et pour direction asymptotique celle de l'axe des x;

D'autre part, l'équation de la courbe peut s'écrire

$$x^2(y^2 - 2px) + f(xy) = 0,$$

$f(xy)$ étant une fonction du deuxième degré.

Elle prouve que la parabole

$$y^2 = 2px$$

est asymptote. De plus, en développant la fonction

$$f(xy) = p^2[p^2 - 4x^2 - 2x(y + p)],$$

on voit qu'il ne peut y avoir de points dans la région ombrée. On en conclut la position de la courbe par rapport à sa parabole asymptote. Ces indications permettent de construire la courbe.

Remarque. — Tout ce que nous avons dit dans l'interprétation du lieu pour les points

$$A(x_1y_1)$$

tels que

$$y_1 > p$$

peut se répéter pour ceux dont l'ordonnée est inférieure à $-p$, et alors, en prenant une parallèle à l'autre bissectrice des axes, on arrive à une équation de même forme que la première, mais dans laquelle x est remplacé par $-x$. Ce qui prouve qu'elle représente une courbe symétrique par rapport à l'axe Ox (ce qui pouvait d'ailleurs se prévoir *à priori*).

Toute la partie des deux courbes correspondant à des points du lieu demandé se trouve dans la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Dès lors, la séparation est facilement faite.

Considérons maintenant les centres des cercles inscrits à des triangles rectangles dans lesquels l'hypoténuse est une normale dont le pied se trouve entre

$$x = 0$$

et

$$x = \frac{p}{2}.$$

On est conduit à faire le même raisonnement que dans le

premier cas, mais à éliminer alors x_1y_1, entre les équations

$$\left[y + \frac{2p}{y_1}(p + x_1)\right] = -\left[x - \frac{(p + x_1)^2}{x_1}\right]$$
$$y = y_1$$
$$y_1^2 = 2px_1;$$

ce qui donne alors pour équation du lieu l'équation

$$y^2[y^2 - 2px] - 4p(y - p)(p^2 + y^2) = 0.$$

Construction du lieu. — L'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$y^2[(y - 2p)^2 - 2px] - 4p^3(y - p) = 0.$$

Mise sous cette forme, on voit que la courbe admet pour asymptote l'axe des x, et pour parabole asymptote la parabole

$$(y - 2p) = 2px = 0;$$

ces considérations donnent la position de la courbe par rapport à ses asymptotes (parabole et droite).

De même que dans le cas précédent, on montre que la courbe correspondant aux valeurs de y_1 comprises entre O et p est symétrique de la précédente par rapport à l'axe des x.

Lieu total. — On prendra la partie utile des courbes précédentes; ces courbes se coupent aux points

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = \pm p,$$

en y admettant des tangentes distinctes (la tangente à l'une des courbes en ce point est perpendiculaire à la symétrique de l'autre tangente en ce point).

QUESTION 76

Solution par M. Édouard Davoine, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée Charlemagne (Ecole Massillon).

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy, *et un cercle* C, *tangent à l'une et à l'autre de ces droites, aux points* A *et* B; *par* O, *on mène une transversale mobile qui rencontre*

C *aux points* M *et* N ; *1° par les quatre points* A, B, M, N *on fait passer une hyperbole équilatère* H; *les tangentes à* H *aux points* M *et* N *se coupent en un point* I : *trouver le lieu de ce point quand* MN *tourne autour du point* O. *Ce lieu est une circonférence ; 2° on joint* AM *et* BN; *ces droites se coupent en un point* I′; *trouver le lieu de ce point* I′ ; *ce lieu est une hyperbole, dont on demande l'équation lorsqu'elle est rapportée à son centre et à ses axes; 3° par les points* A, B, M, N, *on fait passer une parabole* P ; *démontrer que par un point du plan passent deux paraboles* P, *et trouver avec un seul paramètre variable l'équation générale et rationnelle des paraboles* P; *4° trouver le lieu décrit par l'intersection de* P *avec le diamètre de cette courbe qui passe par le point* O. *Ce lieu est une hyperbole homothétique de celle qui a été trouvée tout à l'heure; on construira les asymptotes de ces courbes.*

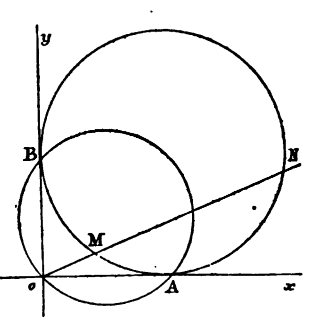


Fig. 1.

En désignant par a la longueur OA = OB, l'équation du cercle C est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0.$$

Celle de la droite AB,

$$x + y - a = 0.$$

Soit $y - mx = 0$ l'équation de la transversale mobile.

L'équation générale des coniques passant par les points A, B, M, N est

$$(y - mx)(x + y - a) + \lambda(x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2) = 0 \quad (\alpha)$$

Cette équation devant représenter des hyperboles équilatères, on a la condition

$$2\lambda - m + 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{m - 1}{2}.$$

Les hyperboles équilatères H, passant par les points A, B, M, N, sont représentées par l'équation

$$(m+1)(y^2-x^2)+2xy(1-m)+2ax-2amy$$
$$+a^2(m-1)=0 \qquad (\beta)$$

Désignons par x_0y_0 les coordonnées du point I, dont nous cherchons le lieu géométrique. La polaire de ce point par rapport à l'hyperbole H est

$$x[-x_0(m+1)+y_0(1-m)+a]$$
$$+y[y_0(m+1)+x_0(1-m)-am]$$
$$+ax_0-amy_0+a^2(m-1)=0$$

Identifions cette équation avec l'équation $y-mx=0$. Nous obtenons les conditions:

$$x_0-my_0+a(m-1)=0 \qquad (1)$$

et

$$\frac{y_0(1-m)-x_0(1+m)+a}{m}$$
$$=am-y_0(m+1)$$
$$-x_0(1-m) \qquad (2)$$

De la première on tire $m=\dfrac{x_0-a}{y_0-a}$. Substituant dans (2) et remplaçant x_0 et y_0 par les coordonnées courantes, on a

$$[y(y-x)-x(x+y-2a)+a(y-a)](a-y)$$
$$=(x-a)[a(x-a)-y(x+y-2a)-x(y-x)]$$

ce qui peut s'écrire

$$a(x-y)(x+y-2a)+y(x-y)(a-y)+ay(y-2a)$$
$$=ax(x-2a)-x(x-y)(a-x)$$

ou

$$(y-x)(x^2+y^2-ay-ax)=0$$

On peut s'expliquer la présence du facteur singulier $y-x=0$. En effet, parmi les hyperboles du réseau, on peut considérer la conique formée par la première bissectrice et par la parallèle AB à la seconde bissectrice. Cette conique correspond au cas où la transversale OM se confond avec la première bissectrice. Les tangentes aux points M et N se confondent alors avec la bissectrice, et par suite leur point de concours.

Ce facteur singulier étant supprimé, il reste, pour le lieu du point I, l'équation

$$x^2+y^2-ay-ax=0$$

qui représente un cercle passant par l'origine, circonscrit au rectangle formé par les axes et les droites $x = a$, $y = a$ (*fig. 1*).

2. — Reprenons l'équation (α) : cette équation pour une certaine valeur de λ représente le faisceau des droites AM, BN. Le point de concours I' de ces droites peut être considéré comme le centre de la conique singulière formée par ces droites. En désignant par $f(x, y, z)$ l'équation rendue homogène du faisceau des deux droites, le lieu du point I' s'obtient en éliminant les paramètres variables λ et m entre les équations :

$$f'(x) = 2(\lambda - m)x + (1 - m)y + a(m - 2\lambda) = 0$$
$$f'(y) = 2(1 + \lambda)y + (1 - m)x - a(1 + 2\lambda) = 0$$
$$f'(z) = -y(1 + 2\lambda) + x(m - 2\lambda) + 2a\lambda = 0$$

Ordonnons ces équations par rapport à λ et m.

$$2\lambda(x - a) - m(2x + y - a) + y = 0$$
$$2\lambda(y - a) - mx + 2y + x - a = 0$$
$$2\lambda(a - x - y) + mx - y = 0$$

On obtient immédiatement le résultat de l'élimination de λ et de μ au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} x - a & a - 2x - y & - y \\ y - a & - x & a - x - 2y \\ a - x - y & x & y \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} x - a & a - 2x - y & - y \\ y - a & - x & a - x - 2y \\ - y & a - x - y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien
$$\begin{vmatrix} x - y & a - x - y & x + y - a \\ y - & a - x & a - x - 2y \\ - y & a - x - y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière ligne

$$-y[(a - x - y)(a - x - 2y) + x(x + y - a)]$$
$$-(a - x - y)[(x - y)(a - x - 2y) - (y - a)(x + y - a)] = 0.$$

On aperçoit le facteur singulier $x + y - a = 0$, qui représente la droite AB, parallèle à la seconde bissectrice. En effet, lorsque la transversale mobile vient à coïncider avec les axes de coordonnées, on voit que les points M et N se confondent en A ou B, et que l'une des droites AM ou BN se

confond avec la droite AB. Le facteur singulier étant supprimé, il reste pour le lieu du point I' l'équation

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2ax - 2ay + a^2 = 0, \qquad (A)$$

qui représente une hyperbole ayant pour centre le point de coordonnées

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}.$$

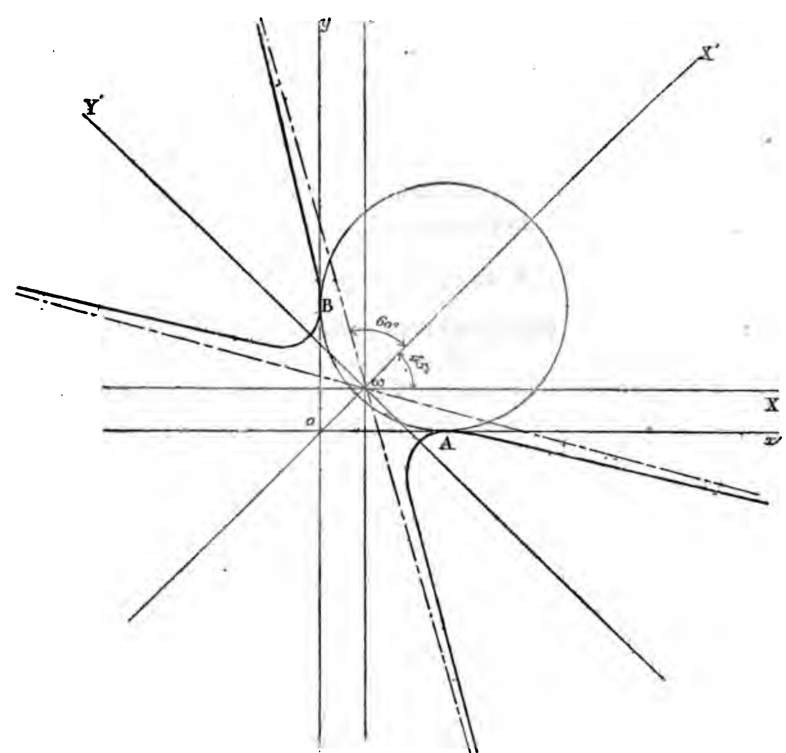


Fig. 2.

Transportons les axes en ce point : l'équation devient, en appelant X et Y les nouvelles coordonnées,

$$X^2 + Y^2 + 4XY + \frac{a^2}{3} = 0.$$

On sait que, l'équation d'une conique étant

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B'xy + \dots = 0,$$

pour rapporter cette conique à ses axes, il faut faire tourner les axes de coordonnées d'un angle φ donné par la formule

$$\text{Tg}\,2\varphi = \frac{2B'}{A - A'}.$$

Appliquant cette formule au cas actuel, nous voyons que

$$\text{Tg}\,2\varphi = \infty;$$

d'où $$2\varphi = 90^0 \quad \varphi = 45^0.$$

Faisons donc tourner les axes autour de la nouvelle origine ω d'un angle de 45°. L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses axes, devient alors, dans le nouveau système Y'ωX',

$$3X'^2 - Y'^2 + \frac{a^2}{3} = 0.$$

On peut facilement construire l'hyperbole dans ce dernier système. Les sommets réels sont les points de coordonnées

$$X' = 0, \ Y' = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les directions asymptotiques sont données par l'équation

$$C^2 - 3 = 0.$$

L'hyperbole étant rapportée à son centre, on aura les asymptotes en menant par le point ω deux droites inclinées à 60° sur l'axe des X'.

La première équation (A) montre que l'hyperbole est tangente au cercle C aux deux points A et B. Ces diverses indications suffisent pour la déterminer (*fig.* 2).

En se reportant à la définition géométrique du lieu, on aurait pu trouver facilement les directions asymptotiques de la courbe. Il faut chercher pour cela quelle doit être la position de la transversale OMN, pour que les droites AM et BN soient parallèles. Dans ce cas, le trapèze AMBN étant isoscèle, les diagonales AB et MN sont égales.

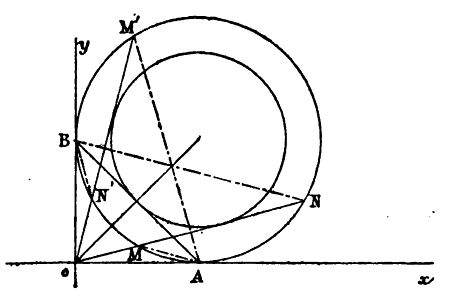


Fig. 3.

Joignons OC, qui est perpendiculaire à AB au point D. Du point C comme centre, avec CD pour rayon, décrivons une circonférence, et menons par le point O des tangentes à cette circonférence. Ces deux tangentes sont précisément les positions de la transversale mobile qui correspondent aux points d'intersection de AM et de BN, situés à l'infini. Donc, AM et BN d'une part, AM′ et BN′ d'autre part, sont les directions asymptotiques *(fig. 3)*.

3. Revenons encore à l'équation (α) qui, ordonnée, s'écrit

$$y^2(1+\lambda) + x^2(\lambda - m) + xy(1 - m) - ay(1+2\lambda) + ax(m - 2\lambda) + a^2\lambda = 0. \qquad (\alpha)$$

Cette équation représentera les paraboles passant par les points A,B,M,N, si l'on a entre les paramètres λ et m la relation

$$(1 - m)^2 = 4(\lambda + 1)(\lambda - m).$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{1-m}{2(\lambda+1)} = \frac{2(\lambda - m)}{1-m} = t.$$

Nous pouvons exprimer λ et m en fonction du seul paramètre t. Il suffit pour cela de résoudre les deux équations

$$2\lambda t + m + 2t - 1 = 0,$$
$$2\lambda + m(t-2) - t = 0.$$

On en tire

$$\lambda = \frac{2t - t^2 - 1}{t^2 - 2t - 1} \qquad m = \frac{1 - 2t - t^2}{1 + 2t - t^2}.$$

Portant ces valeurs de λ et m dans l'équation (α), et chassant le dénominateur, on a

$$2y^2 + 2t^2x^2 + 4txy - ay\,(t^2 - 2t + 3) + ax(2t - 3t^2 - 1) + a^2(t^2 - 2t + 1) = 0. \qquad (P)$$

Telle est, avec un seul paramètre variable, l'équation générale et rationnelle des paraboles P. Le paramètre t entrant au second degré, on voit que par un point du plan on peut faire passer en général deux paraboles P. On pourrait chercher le lieu des points tels que ces deux paraboles se confondent.

Il suffirait pour cela de résoudre l'équation du second degré en t, et d'exprimer que la quantité soumise au radical est nulle.

4. Le diamètre de la parabole qui passe par l'origine O, a pour équation

$$y\sqrt{2} + t\sqrt{2}\,x = 0,$$

ou

$$y + tx = 0.$$

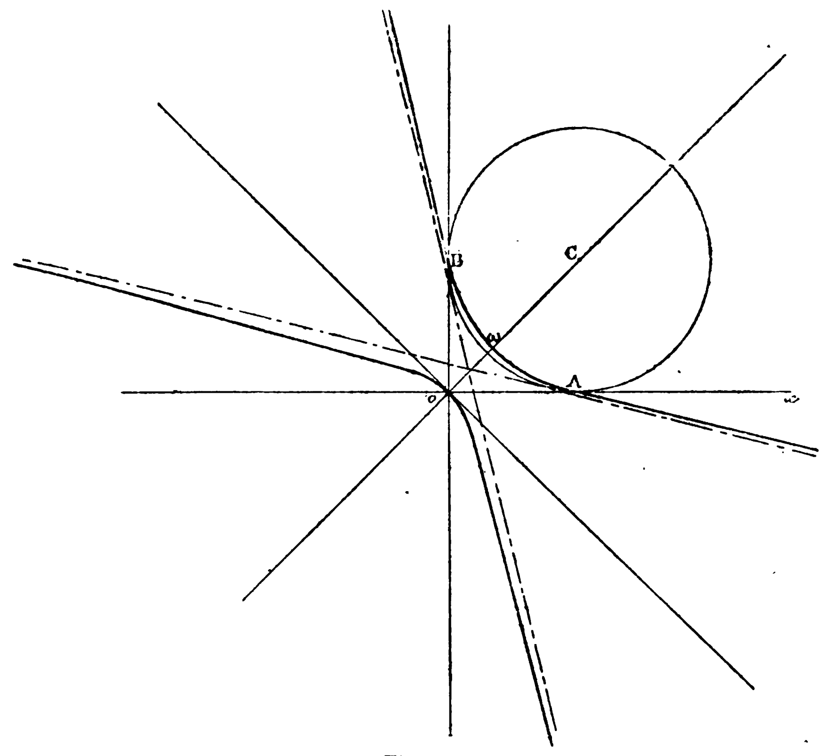


Fig. 4.

Le lieu décrit par l'intersection de la parabole avec ce diamètre s'obtient en éliminant t entre l'équation précédente et l'équation (P).

On a

$$t = -\frac{y}{x}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (P) et simplifiant, il vient

$$x^2 + y^2 + 4xy - ax - ay = 0. \qquad \text{(B)}$$

Cette équation représente une hyperbole passant par l'origine tangentiellement à la seconde bissectrice. Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées

$$x = y = \frac{a}{6}.$$

Cette hyperbole coupe les axes de coordonnées aux points A et B. Ses asymptotes sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole (A) précédemment trouvée. Les termes du second degré étant identiques dans les équations (A) et (B), les deux hyperboles représentées par ces équations sont homothétiques. Mais les discriminants des deux formes (A) et (B) étant de signes contraires, le rapport d'homothétie est imaginaire. Par suite, l'hyperbole A étant renfermée dans l'angle aigu des asymptotes, l'hyperbole B, au contraire, sera tenue dans l'angle obtus. Cette dernière hyperbole, comme il est facile de le reconnaître, a pour sommets réels l'origine des axes et le point ω, centre de l'hyperbole A. Elle est disposée comme l'indique la figure ci-dessus.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Genin et Robinet, à Bar-le-Duc.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1884

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P et Q, et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie.

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R;

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer

la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre;

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

Mathématiques élémentaires.

Trouver les angles d'un quadrilatère circonscrit à un cercle de rayon r, connaissant trois côtés consécutifs a, b, c du quadrilatère. Entre quelles limites doit varier r pour que le problème soit possible, les côtés a, b, c restant constants. On distinguera deux cas, celui où les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence sont situés sur les côtés eux-mêmes et celui où ces points de contact sont sur les prolongements des côtés.

COMPOSITION

SUR CERTAINES PARTIES, DÉSIGNÉES A L'AVANCE, DU PROGRAMME DE LA LICENCE.

Théorie. — Dire ce que l'on entend par intégrale complète, intégrale générale, intégrale particulière, intégrale singulière, d'une équation entre n variables indépendantes, une fonction inconnue z de ces variables et les dérivées partielles du premier ordre de z par rapport aux mêmes variables.

Montrer comment la connaissance d'une intégrale complète peut conduire à l'intégrale générale.

Étant donnée une équation de la forme considérée, *non linéaire*, exposer brièvement une des méthodes d'intégration qui lui sont applicables: le choix de la méthode est laissé à chaque candidat.

Application. — Intégrer l'équation.

$$m^2(1 + p^2 + q^2) - m(x - y)(p - q) - 2x = 0,$$

dans laquelle on désigne par m une longueur donnée, par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et par rapport à y.

COMPOSITIONS FINALES

Mécanique rationnelle.

On donne un héliçoïde représenté, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$z = m \text{ arc tg } \frac{y}{x};$$

un point matériel non pesant, assujetti à rester sur la surface parfaitement polie de l'héliçoïde, est attiré vers l'axe OZ par une force dirigée suivant la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe, et inversement proportionnelle au cube de cette perpendiculaire. Déterminer, dans le cas général, la loi du mouvement du point considéré, la pression sur l'héliçoïde, et les diverses formes que peut affecter la trajectoire. Examiner les cas particuliers où la projection de la trajectoire sur le plan xoy peut être représentée par une équation où n'entrent que des fonctions algébriques, logarithmiques, exponentielles ou circulaires.

Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre régulier SABC, et l'on propose de construire l'intersection de deux cônes définis de la façon suivante : le premier a pour sommet S et pour base le cercle inscrit dans ABC; le deuxième a pour sommet C et pour base le cercle inscrit dans SAB. — *Données :* L'arête du tétraèdre a 17 centimètres ; la face ABC est située dans le plan horizontal, AB est parallèle à la ligne de terre et située à 2 centimètres au-dessous de cette ligne. Pour distinguer les parties visibles et les parties invisibles, on regardera les deux cônes comme opaques et limités aux parties intérieures du tétraèdre. Le tétraèdre est transparent.

Calcul.

Si l'on désigne par a le demi-grand axe d'une ellipse, par e son excentricité, par $2s$ la longueur de l'arc de cette courbe compris dans l'angle obtus formé par les deux demi-diamètres

conjugués égaux, on démontre que le rapport $\frac{s}{a}$ est exprimé par la série suivante :

$$\frac{s}{a}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi-2}{16}e^2-\frac{2\pi-8}{256}e^4-\frac{15\pi-44}{3072}e^6-\frac{25(21\pi-64)}{196608}e^8\dots\dots$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on donne

$$\frac{s}{a}=0,78,$$

et l'on demande de calculer, par la méthode des approximations successives, la valeur de e, avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes à sept décimales.

CONCOURS POUR L'ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE SESSION 1884

Géométrie analytique.

On donne l'équation

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0$$

d'une hyperbole rapportée à son centre et à ses axes, et l'équation

$$y-kx=0$$

d'une droite menée par le centre de cette hyperbole

1° Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite données, et qui, de plus, sont tangentes à l'hyperbole en celui des sommets de cette hyperbole qui est situé sur la partie positive de l'axe des x. — Discuter cette équation générale et reconnaître la nature des coniques qu'elle peut représenter.

2° Trouver le lieu des centres des coniques représentées

par l'équation générale précédente. Ce lieu est une conique Δ. Chercher un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer géométriquement cette conique Δ,

3° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à la conique Δ parallèlement à la droite du coefficient angulaire $\frac{b}{a}$, quand on fait varier k. On vérifiera que l'équation de ce dernier lieu, qui est du troisième degré, représente trois droites.

Calcul logarithmique.

On donne deux côtés d'un triangle, et l'angle compris :

$$a = 2317^{m},455$$
$$b = 8423^{m},761$$
$$C = 122^{\circ}\ 47'\ 35'',1\ ;$$

on demande de calculer les trois autres éléments A, B, c, du triangle, et sa surface.

Physique et chimie.

Un espace V contient un mélange d'air et de vapeur d'eau à une température t, et sous la pression totale H. La vapeur n'est pas saturée, et possède une tension f. On demande de calculer la pression totale x du mélange, si l'on ramène la température à être V', en distinguant le cas où il y a condensation, et le cas où ce phénomène ne se produit pas. — On distingue par F' la tension maximum de la vapeur d'eau à la température t'.

— Un récipient fermé, de capacité invariable et égale à un mètre cube, contient de l'air humide dont la température est 23°, et l'état hygrométrique 0,75. La température descend à 5° dans cet espace. Quel sera le poids de la vapeur liquéfiée ?

Tension maximum de la vapeur à 23° .	$20^{mm},888$
— — à 5° .	$6^{mm},534$
Densité de la vapeur d'eau.	0,622
Poids du litre d'air à 0° et à 760^{mm} . .	$1^{g},293$
Coefficient de dilatation des gaz	0,003665.

— Indiquer les différents cas dans lesquels l'ammoniaque et les composés ammoniacaux prennent naissance.

— On donne 100 litres, mesurés à 0° et sous la pression 760^{mm} de gaz oxyde de carbone. On demande : 1° quel volume d'oxygène, à 0° et sous la pression 760, il faut employer pour en produire la combustion complète ; 2° quel est, dans les mêmes conditions, le volume de gaz acide carbonique produit. On demande de résoudre le problème par la méthode des équivalents en poids et par celle des équivalents en volumes.

Données numériques.

	Équiv. en poids	Équiv. en vol.	Poids du litre
CO	14	2	$1^{g},254$
O	8	1	1,43
CO^2	22	2	1,9774.

Géométrie descriptive.

Une droite de front ($s\theta$, $s'\theta'$) dont l'éloignement est égal à $0^{m},80$, et dont la trace horizontale θ se trouve à 0,050 de la projection horizontale s de son point de rencontre (s, s') avec le plan bissecteur du premier dièdre, engendre, par sa rotation autour de la verticale du point (s, s') un *premier cône* de révolution.

Un second cône a pour sommet le milieu (σ, σ') de la droite ($s\theta$, $s'\theta'$) ; sa trace horizontale est un cercle, dont le centre c se trouve en avant de la droite $s\theta$, dont le rayon est égal à la longueur de cette droite, et qui passe par les extrémités s et θ de cette même droite.

On demande de construire les projections de la partie, supposée solide et opaque, des deux nappes du *premier cône*, qui, placée à l'extérieur des deux nappes du second cône et derrière le plan de front F, dont l'éloignement est $0^{m},140$, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et un plan horizontal P' à la cote 0,215.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces

constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive,

Titre intérieur : Intersection de deux cônes.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,180$ du petit côté inférieur, et le point (s, s') au milieu de la feuille.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26466-4.

TRANSFORMATION PLANE DES QUADRIQUES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite et fin*, voir p. 193.)

19. — Lorsque la figure tracée sur le plan fondamental est une circonférence γ, nous avons montré qu'au centre ω' de γ orrespondait, sur la quadrique, un point Ω, déterminé comme nous l'avons dit. Si le point ω' s'éloigne à l'infini, Ω vient se confondre avec le point A'. En effet, le pôle de l'ellipse Γ qui correspond à γ est situé dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point A'; la droite qui joint A' à ce pôle est donc tangente à l'ellipsoïde et, pour ce motif, la construction indiquée au paragraphe 5 donne le point A' lui-même, comme correspondant au point situé à l'infini. Ceci concorde d'ailleurs avec ce que nous avons indiqué (§ 7; rem. VIII), quand nous avons cherché la correspondance des points situés à l'infini sur le plan Π.

Voici, à ce propos, une propriété des ellipses qui correspondent aux droites du plan fondamental, propriété qui peut être utile dans la transformation que nous développons.

20. Théorème. — *A une droite δ du plan fondamental, correspond une ellipse Δ, sur l'ellipsoïde ; soit* P *le pôle de* Δ. *La droite* AP *rencontre la surface en un point* M; *le correspondant de* M, *sur* Π, *est le symétrique de l'origine* ω, *par rapport à* δ.

Soit

$$Mt + N\theta = 1,$$

l'équation de δ; les formules (e), (§ 3), donnent, pour le plan de l'ellipse Δ, l'équation

$$M\frac{y}{b} + N\frac{z}{c} = 1 + \frac{x}{a}.$$

En cherchant les coordonnées ξ, η, ζ de M, un calcul simple et semblable à celui que nous avons fait plus haut

(§ 5) donne :

$$(\mathrm{M})\left\{\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2-4}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+4}, \\ \frac{\eta}{b} &= \frac{4\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+4}, \\ \frac{\zeta}{c} &= \frac{4\mathrm{N}}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2+4}. \end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant le point m qui, sur le plan Π, correspond à M. Les formules (e) donnent pour calculer les coordonnées t', θ', de ce point, les égalités

$$t' = \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}, \qquad \theta' = \frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}.$$

On vérifie alors, sans peine, que le point $m(t', \theta')$ est le point symétrique de l'origine ω, par rapport à δ.

21. Théorème. — *Lorsque deux points* m *et* n, *du plan* Π, *sont tels que le produit de leurs distances à l'origine* ω *soit constant, les points correspondants* M, N *étant projetés sur l'axe* AA' *aux points* μ *et* ν, *on a*

$$\frac{\mu\mathrm{A}}{\mu\mathrm{A}'} \cdot \frac{\nu\mathrm{A}}{\nu\mathrm{A}'} = \mathrm{c}^{\text{te}}.$$

En effet, la formule fondamentale

$$\frac{x}{a} = \frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2}$$

donne

$$\frac{x+a}{a-x} = \frac{1}{t^2+\theta^2}.$$

On a donc

$$\overline{\omega m}^2 = \frac{a-x}{a+x} = \frac{\mu\mathrm{A}}{\mu\mathrm{A}'}.$$

On trouve, de même,

$$\overline{\omega n}^2 = \frac{\nu\mathrm{A}}{\nu\mathrm{A}'},$$

et le produit

$$\frac{\mu\mathrm{A}}{\mu\mathrm{A}'} \cdot \frac{\nu\mathrm{A}}{\nu\mathrm{A}'}$$

représente bien la quantité, supposée constante.

$$\sqrt{\omega m \, . \, \omega n} \, .$$

22. — REMARQUE I. Parmi les cas particuliers de la propriété précédente nous signalerons les suivants:

1° *Lorsque les deux points* m *et* n *du plan* Π *sont situés en ligne droite avec l'origine* ω, *si l'on a*

$$\omega m \,.\, \omega n = -1,$$

les points correspondants M, N, *sont diamétralement opposés sur l'ellipsoïde.*

Les coordonnées (t', θ') de m, (t'', θ'') de n, vérifient les égalités

$$\sqrt{t'^2 + \theta'^2} \quad \sqrt{t'' + \theta''^2} = -1,$$

$$t'' = \frac{-t'}{t'^2 + \theta'^2},$$

$$\theta'' = \frac{-\theta'}{t'^2 + \theta'^2}.$$

Les coordonnées (x', y', z') de M, (x'', y'', z'') de N, vérifient donc les relations

$$\frac{(x' + a)(x'' + a)}{(a - x')(a - x'')} = 1,$$

$$\frac{z'}{z''} = \frac{y'}{y''} = \frac{t'}{t''} \cdot \frac{1 + t''^2 + \theta''^2}{1 + t'^2 + \theta'^2};$$

lesquelles donnent, en tenant compte des précédentes égalités,

$$x' = -x'', \quad y' = -y'', \quad z' = -z''.$$

2° *Lorsque deux points* m, n, *du plan* Π, *sont en ligne droite avec l'origine* ω, *si l'on a*

$$\omega m \,.\, \omega n = +1,$$

les points correspondants M, N, *de l'ellipsoïde, sont symétriques par rapport au plan principal* YOZ.

Le calcul précédent donne, dans ce cas,

$$x'' = -x', \quad y'' = y', \quad z'' = z'.$$

23. — REMARQUE II. Lorsque deux droites δ, δ' du plan Π sont rectangulaires, nous avons montré plus haut (§ 10) comment se transformait cette propriété; mais nous voulons faire encore une autre remarque, relative à la transformation des deux droites rectangulaires du plan Π.

Soient

$$At + B\theta + C = o,$$
$$Bt - A\theta + C' = o,$$

les équations des droites proposées; à ces droites correspondent, sur l'ellipsoïde, deux ellipses dont les plans ont pour équation, respectivement [v. formules (*e*), § 3],

$$A\frac{y}{b} + B\frac{z}{c} + C\left(1 + \frac{x}{a}\right) = o,$$

$$B\frac{y}{b} + A\frac{z}{c} \quad C'\left(1 + \frac{x}{a}\right) = o.$$

D'après cela, ces plans ont pour traces, sur YOZ, deux droites dont les coefficients angulaires ont un produit égal à

$$-\frac{c^2}{b^2};$$

d'où la propriété suivante :

A deux droites rectangulaires du plan fondamental, correspondent deux ellipses dont les plans coupent le plan YOZ *suivant deux droites ayant des directions conjuguées, relativement à l'ellipse principale située dans ce plan.*

24. Applications. — Réflexions générales. Les applications d'une méthode de transformation, bien qu'en nombre infini, du moins en théorie, sont, au contraire, dans la pratique, très restreintes; parce que l'on doit rejeter évidemment tous les théorèmes compliqués qu'elle peut fournir. Il peut aussi arriver que le point auquel on aboutit, en transformant une propriété connue, soit une vérité évidente d'elle-même.

Donnons d'abord un exemple de l'impuissance que nous signalons ici, et proposons-nous de transformer la propriété relative aux axes radicaux de trois cercles situés dans un plan.

Désignons ces cercles par *a*, *b*, *c*; appelons (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), leurs points communs; (α, α') représentant les points communs à *b* et *c*; et ainsi des autres.

Aux cercles *a*, *b*, *c*, correspondent sur E, des ellipses a', b', c'; la droite (α, α') donne une ellipse a'' passant par le sommet A′ ou, en transformant homographiquement

l'ellipsoïde, par un point quelconque de cette surface (*). Le théorème élémentaire que nous avons rappelé donnerait donc, d'après la transformation omaloïdale, la propriété suivante.

On considère, sur un ellipsoïde E, *trois ellipses* a', b', c' *et un point* A'; *par* A' *et par les points communs aux ellipses* b' *et* c', *on peut tracer une ellipse sur la surface; les trois ellipses ainsi obtenues concourent au même point.*

Mais cette propriété est, pour ainsi dire, évidente par elle-même. Elle résulte immédiatement de ce fait, que les trois ellipses visées dans l'énoncé précédent passent nécessairement par le point de rencontre de l'ellipsoïde, avec la droite qui joint le point A' au point de concours des plans qui renferment les trois ellipses a', b', c'.

25. — Voici, au contraire, un exemple de transformation effective. Cet exemple, par lequel nous terminons ce travail, a été choisi, entre beaucoup d'autres, peut-être plus importants, pour montrer comment, par la puissance de la transformation, on peut tirer, des théorèmes les plus élémentaires, certaines propriétés de la géométrie supérieure.

Considérons un rectangle ωpmq et prenons deux de ses côtés pour axes des coordonnées t, θ.

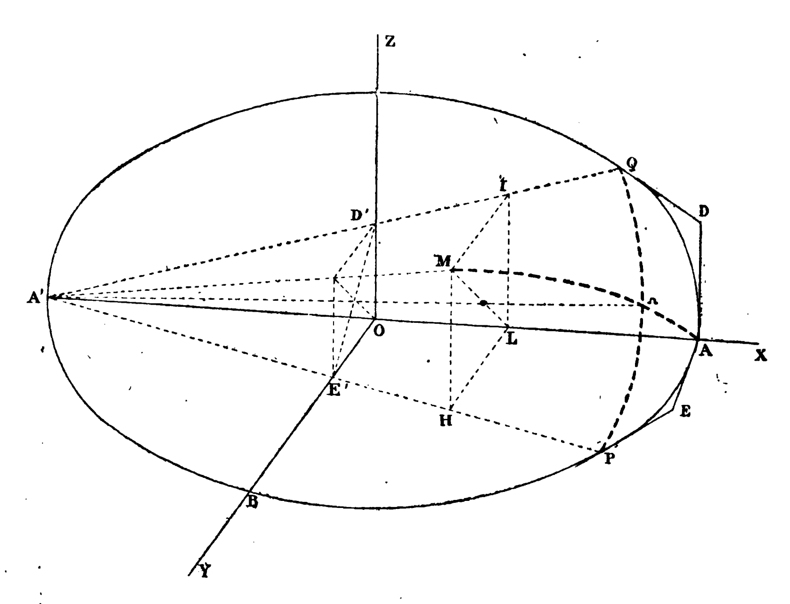
Au point m, correspond un point M sur l'ellipsoïde; à la droite mp $(t = h)$ correspond, d'après la première des formules (e), une ellipse située dans un plan parallèle à OZ; on sait d'ailleurs que cette ellipse, correspondant à une droite du plan Π, passe par A'. D'après cela, si l'on projette M en H sur le plan YOX, la droite A'H rencontre l'ellipse principale ABA' en un point P, qui est le correspondant de p.

En projetant M sur ZOX, en I, on voit de même que Q correspond à q.

(*) Pour marquer que le point A' est un point quelconque de l'ellipsoïde, il n'est même pas nécessaire d'introduire la transformation homographique; il suffit d'observer que rien ne suppose, dans les calculs précédents, que les axes OX, OY, OZ, sont rectangulaires, et toutes nos conclusions subsistent en prenant, pour axes de coordonnées, trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

Enfin au cercle γ qui est circonscrit au rectangle ωpmq, correspond une ellipse passant par les trois points P, M, Q, et aussi (§ 7, rem. V) par A. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on prend un point quelconque* M *sur l'ellipsoïde et si on le joint à un sommet* A′ *de la surface, les projections de* A′M *sur les deux plans principaux qui passent par le sommet considéré* A′ *rencontrent les ellipses principales, respectivement, en des points* P *et* Q; *le plan* MPQ *passe par un point fixe qui est le sommet* A, *opposé à* A′.



26. — Enfin, voici une deuxième propriété résultant encore de la figure plane considérée.

On sait que le point de concours des diagonales, le point ω', est le centre de γ. A la droite pq, correspond l'ellipse PA′Q; et à ωm, l'ellipse AMA′ ; au point ω' correspond le point Ω (autre que A′), commun à ces deux ellipses ; nous savons (§ 5) que celui-ci est en ligne droite avec le pôle ρ du plan AMPQ et le point A′.

Cherchons la position de ce point ρ ; à cet effet, menons les tangentes aux ellipses principales aux points A, P et Q.

Les plans tangents à la quadrique en ces points étant perpendiculaires aux plans principaux, le pôle du plan APQ est un point dont les coordonnées sont : a, AE, AD.

D'autre part, une propriété très simple (*), et probablement très connue, de l'ellipse donne

$$DA = OD', \text{ et } AE = OE';$$

la droite $A'\rho$ rencontre donc le plan ZOY en un point dont les coordonnées sont : $a = O$, $\frac{OE'}{2}$, $\frac{OD'}{2}$. Ce point n'est autre que le milieu de D'E'.

D'ailleurs, la droite $A'\Omega$ passant par le milieu de D'E, passe aussi par le milieu de ML, L désignant la projection de M sur AA'; de là, l'énoncé suivant :

Théorème. — *On considère un axe* AA' *d'un ellipsoïde et une corde* A'M *de cette surface; si l'on projette* A'M *sur les deux plans principaux qui passent par* AA', *on obtient deux cordes* A'P, A'Q :

Les ellipses (A'PQ), (A'AM), *se coupent en un point* Ω, *et la droite* $A'\Omega$ *coupe en deux parties égales la projetante de* M *sur l'axe* AA'.

27. — Nous ne voulons pas nous étendre davantage sur les applications que comporte cette méthode de transformation, mais nous pouvons dire, après l'avoir vérifié sur des cas nombreux, que ces applications donnent lieu à des exercices intéressants, exercices que l'on peut démontrer ensuite, par une analyse le plus souvent assez simple. L'exemple que nous avons traité a été mis ici uniquement pour indiquer la marche qu'il faut suivre en appliquant cette méthode de transformation et il n'a, par lui-même, aucune importance. En développant cet exemple, nous avons seulement cherché à montrer, comme nous l'avons dit plus haut, l'efficacité d'un

(*) On déduit, en particulier, de cette remarque, une construction très commode de la tangente, en un point de l'ellipse, connaissant ce point et l'un des axes, en grandeur et en position, au moyen de la règle et de l'équerre.

procédé qui permet d'exploiter les vérités les plus simples de la géométrie plane, pour en tirer des propriétés correspondantes de la géométrie des quadriques.

Nous reviendrons d'ailleurs sur cette étude, que nous laissons ici très incomplète, et nous appliquerons alors la transformation omaloïdale à la recherche de propriétés de certaines quartiques gauches particulières qui, sur l'ellipsoïde, correspondent aux coniques du plan fondamental (*).

QUESTION 72

Première solution par M. J. Lemoine, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

On donne une parabole P, *rapportée à ses axes ordinaires; par le pied de la directrice on mène une transversale qui rencontre* P *en deux points* A *et* B. *Soit* C *le cercle qui passe par ces points et par le foyer de* P.

Lieu des centres des cercles C. *Ce lieu est une parabole cubique.*

Enveloppe des polaires de l'origine. Cette courbe est une cubique unicursale.

Enveloppe des cercles C; *on trouvera une quartique à point triple.*

Par le pied de la directrice on mène deux droites rectangulaires Δ *et* Δ'. *Soient* C *et* C' *les cercles correspondants. Trouver le lieu des points communs à* C *et à* C'; *ce lieu est une quartique passant doublement par les ombilics du plan.*

(G. L.)

Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

l'équation de la parabole et

$$y = m\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

une sécante passant par le pied de la directrice. La seconde

(*) On peut voir sur ce sujet un intéressant mémoire de Clebsch (MATH. ANNALEN, 1869; p. 253. *Ueber die abbildung algebraischer* Flächen, inbesondere der vierten und fünften ordnung.

corde d'intersection du cercle avec la parabole aura pour coefficient angulaire — m. Son équation sera

$$y + mx + n = 0.$$

Par l'intersection de ces deux droites avec la parabole je fais passer une conique

$$\lambda(y^2 - 2px) + \left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)(y + mx + n = 0.$$

En écrivant que cette conique est un cercle passant par le foyer de la parabole, on obtient l'équation de ce cercle :

$$m^2(x^2 + y^2) - p(1 + m^2)x - \frac{p}{m}y + \frac{p^2}{4}(2 + m^2) = 0$$

ou $$m^2\left[y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right] - p\left(x - \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{m}\ y = 0.$$

Transportant les axes au foyer $x = \frac{p}{2}$ $y = 0$,

on trouve $$m^2(x^2 + y^2) - px - \frac{p}{m}\ y = 0,$$

Lieu des centres. — Le centre sera défini par les deux dérivées partielles égalées à 0.

$$2m^2x - p = 0,$$

$$2m^2y - \frac{p}{m} = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on obtient le lieu des centres $$y^2 = \frac{2}{p}\ x^3,$$

parabole cubique qui est une développée de parabole.

Enveloppe des polaires de l'origine. — Dans le système actuel le sommet de la parabole a pour coordonnées

$$y = 0, \quad x = -\frac{p}{2},$$

Sa polaire a donc pour équation

$$\frac{p}{2}(2m^2x - p) + px + \frac{p}{m}\cdot y = 0$$

ou $$m^3 + m\frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)}{x} + \frac{y}{x} = 0.$$

Si j'écris que cette équation en m a une racine double, il vient l'équation du lieu

$$\frac{4\left(x-\frac{p}{2}\right)^3}{x}+27y^2=0$$

$$y^2+\frac{4}{27x}\left(x-\frac{p}{2}\right)^3=0$$

C'est une cubique unicursale ayant pour asymptote l'axe des y et comme point de rebroussement le point

$$x=\frac{p}{2}\ y=0.$$

Enveloppe des cercles C. — L'enveloppe des cercles C s'obtiendra en éliminant m entre l'équation du cercle et l'équation dérivée en m

$$2m(x^2+y^2)+\frac{p}{m^2}y=0.$$

On trouve ainsi la courbe suivante:

$$27y^2(x^2+y^2)-4px^3=0,$$

quartique ayant l'origine pour point triple avec la tangente $x=0$. Elle a des branches paraboliques dont la concavité est tournée vers l'axe Ox (*).

Intersection des cercles correspondant à deux droites rectangulaires. — Les cercles C et C' correspondant aux droites rectangulaires Δ et Δ' ont pour équation

$$\begin{cases} m^2(x^2+y^2)=px+\dfrac{p}{m}y \\ \dfrac{1}{m^2}(x^2+y^2)=px-pmy. \end{cases}$$

Il s'agit d'éliminer m entre ces deux équations.

Je les ajoute

$$(x^2+y^2)\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)=2px+py\left(\frac{1}{m}-m\right).$$

Je les retranche

$$(x^2+y^2)\left(m^2-\frac{1}{m^2}\right)=py\left(m+\frac{1}{m}\right)$$

ou divisant par $m+\dfrac{1}{m}$ qui est différent de zéro:

(*) Il fallait déterminer la parabole asymptote de cette courbe. (G. L.)

$$m - \frac{1}{m} = \frac{py}{x^2 + y^2}$$

$$m^2 + \frac{1}{m^2} = \frac{p^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2 = \frac{p^2y^2 + 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

On aura donc comme équation du lieu

$$\frac{p^2y^2 + 2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 2px - \frac{p^2y^2}{x^2 + y^2}$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - px(x^2 + y^2) + p^2y^2 = 0.$$

Cette courbe n'a pas de points à l'infini. Elle a un point de rebroussement à l'origine avec l'axe des x comme tangente. En la mettant sous la forme

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - px) + p^2y^2 = 0$$

on voit qu'elle est tout entière comprise à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 - px = 0.$$

Il est alors facile de la construire (*).

Deuxième solution, par M. U. Génin, élève au Lycée de Bar-le-Duc.

I. — L'équation de la parabole est :

$$y^2 = 2px,$$

celle du cercle sera de la forme:

$$\left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)(y + mx + k) + \lambda(y^2 - 2px) = 0.$$

Égalons les coefficients de x^2 et de y^2 :

$$1 + \lambda = -m^2.$$

d'où

$$\lambda = -(1 + m^2),$$

Exprimons que le cercle passe au foyer de la parabole :

$$-mp\left(\frac{mp}{2} + k\right) = \lambda p^2 = 0,$$

d'où

$$k = -\frac{\lambda p^2 + \frac{1}{2}m^2p^2}{mp} - p\,\frac{2 + m^2}{2m}.$$

(*) Pour préciser le tracé de cette courbe on pouvait déterminer les tangentes issues de l'origine. *(G. L.)*

L'équation finale du cercle est donc :

$$\left(y - mx - \frac{mp}{2}\right)\left(y + mx + p\,\frac{2 + m^2}{2m}\right) - (1 + m^2)(y^2 - 2px) = 0,$$

ou :

$$x^2 + y^2 - p\,\frac{1 + m^2}{m^2}\,x - \frac{p}{m^3}\,y + \frac{p^2}{4m^2}\,(2 + m^2) = 0.$$

Les coordonnées du centre sont :

$$x = p\,\frac{1 + m^2}{2m^2}, \qquad y = \frac{p}{2m^3}.$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations.

La première donne :

$$m^2 = \frac{p}{2x - p}.$$

Portons cette valeur dans la seconde ; on en tire

$$m = \frac{2x - p}{2y}.$$

Le lieu est donc :

$$(2x - p)^3 = 4py^2.$$

C'est une parabole cubique qui a pour point triple le foyer de la parabole donnée.

II. — La polaire d'un point x_0, y_0 est :

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0.$$

Pour l'origine, elle se réduit à $f'_z = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1 + m^2}{m^2}\,x + \frac{y}{m^3} - p\,\frac{2 + m^2}{2m^2} = 0.$$

ou :

$$m^3(2x - p) + 2m(x - p) + 2y = 0. \qquad (1)$$

La dérivée par rapport à m est :

$$3m^2(2x - p) + 2(x - p) = 0.$$

Il faut éliminer m entre (1) et (2). Dans la première je remplace m^2 par sa valeur tirée de la seconde, et j'ai :

$$m = \frac{3y}{2(p - x)};$$

portant dans (2), j'ai le lieu :

$$27y^2(2x - p) = 8(p - x)^3.$$

C'est bien une cubique unicursale, car si on transporte les

axes de coordonnées au point : $y = 0$, $x = p$ et qu'on pose $y = tx$, on pourra avoir y et x en fonction de t.

III. — J'ordonne l'équation du cercle par rapport à m.

$$m^3\left(x^2 + y^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) - mp\left(x - \frac{p}{2}\right) - py = 0.$$

Je prends sa dérivée par rapport à m :

$$3m^2\left(x^2 + y^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) - p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations pour avoir le lieu demandé :

Dans la première, je porte la valeur de m^2 tirée de la seconde, et j'obtiens : $m = \dfrac{-3y}{2x - p}$.

Portons cette valeur de m dans la deuxième :

$$27y^2\,[(2x - p)^2 + 4y^2] = 2p\,(2x - p)^3.$$

C'est une courbe du quatrième degré qui admet pour point triple le foyer de la parabole.

IV. — Les équations de deux cercles correspondant à deux droites rectangulaires sont :

$$m^3[(2x - p)^2 + 4y^2] - 2mp\,(2x - p) - 4py = 0. \quad (\alpha)$$

et

$$4pym^3 - 2m^2p\,(2x - p) + [(2x - p)^2 + 4y^2] = 0. \quad (\beta)$$

Il faut éliminer m entre ces deux équations pour avoir le lieu de leurs points de rencontre.

Cela revient à exprimer que ces deux équations ont une racine commune ; si j'appelle m_1, m_2, m_3, les racines de la première, celles de la seconde seront $\dfrac{-1}{m_1}$, $\dfrac{-1}{m_2}$, $\dfrac{-1}{m_3}$; on doit avoir, par exemple : $m_1 = \dfrac{-1}{m_3}$, d'où $m_1 m_3 = -1$.

Donc au lieu d'éliminer m entre les équations (α) et (β), je vais exprimer que la première (α) a deux racines m_1, m_3 telles que $m_1 m_3 = -1$, c'est-à-dire qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$m^3\,[(2x - p)^2 + 4y^2] - 2mp\,(2x - p) - 4py$$
$$= (am^2 + bm - a)\,(lm + q).$$

En identifiant les deux membres, on en tire les relations :

$$al = (2x - p)^2 + 4y^2 \qquad (1)$$
$$aq + bl = 0 \qquad (2)$$
$$bq - al = -2p\,(2x - p) \qquad (3)$$
$$aq = 4py. \qquad (4)$$

La deuxième donne : $bl = -4py$.

La troisième donne : $bq = (2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)$

d'où $\dfrac{l}{q} = \dfrac{-4py}{(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)}$.

En divisant (1) par (4) membre à membre, on a :

$$\frac{l}{q} = \frac{(2x - p)^2 + 4y^2}{4py}.$$

Donc le lieu a pour équation :

$$\frac{(2x - p)^2 + 4y^2}{4py} = \frac{-4py}{(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)}$$

ou :

$$[(2x - p)^2 + 4y^2]\,[(2x - p)^2 + 4y^2 - 2p\,(2x - p)] + 16py^2 = 0.$$

Les ombilics du plan ont pour coordonnées :

$$(i, -1, 0), \quad (-i, 1, 0).$$

Si on porte ces valeurs de x, y, z, dans l'équation de la courbe, on trouve :

$$4\,(-1 + 1)^2 = 0.$$

Donc la courbe passe doublement aux ombilics du plan.

QUESTION 88

Solution par M. E. Simonot, à la Faculté libre de Lyon.

On considère une ellipse E, *et le cercle* Δ *décrit sur le petit axe* BB′ *comme diamètre. Sur* BB′ *à partir du centre* O, *on prend deux points* P, P′ *tels que l'on ait*

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP'} = \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{a}};$$

par ces points P et P′ *on mène deux droites parallèles et dans la même direction ; ces droites rencontrent* Δ *en deux points* q *et* q′.

Trouver le lieu décrit par le point de rencontre des tangentes à Δ *aux points* q *et* q'.

1° *Solution analytique.* — Les droites Pq, P'q' ont pour équations

$$\text{P}q \qquad ay - bc = mx \qquad (1)$$
$$\text{P}'q' \qquad ay + bc = mx \qquad (2)$$

(α, β) étant le pôle de Pq, (α_1, β_1) celui de P'q'.

En identifiant les polaires de ces points avec les équations (1) et (2), il vient

$$\alpha = -\alpha_1 = -\frac{bm}{c}, \quad \beta = -\beta_1 = \frac{ab}{c}.$$

L'équation quadratique du système des deux tangentes Nq est

$$(x^2 + y^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - (\alpha x + \beta y - b^2)^2 = 0. \quad (3)$$

et celle du sytème des deux tangentes N'q' est

$$(x^2 + y^2 - b^2)(\alpha^2 + \beta^2 - b^2) - (\alpha x + \beta y + b^2)^2 = 0. \quad (4)$$

Les coordonnées du lieu satisferont à l'équation

$$\alpha x + \beta y = 0$$

obtenue en retranchant (3) de (4), ou à

$$-\frac{bmx}{c} + \frac{aby}{c} + 0,$$

d'où

$$m = \frac{ay}{x}.$$

En éliminant α, β et m dans l'équation (3), il vient comme équation du lieu,

$$(x^2 + y^2 - b^2)(a^2y^2 + b^2x^2) - b^2c^2x^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

En supprimant le facteur étranger $x^2 + y^2 = 0$, on voit que l'équation du lieu se réduit à celle de l'ellipse E.

2° On peut arriver plus rapidement au résultat par des considérations géométriques.

En effet, le triangle rectangle MOq donne

$$b^2 = \rho \, . \, \text{OR} = \rho\sqrt{b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\cos^2\varphi}$$

d'où

$$ab = \rho\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} = \rho\sqrt{a^2 - \frac{c^2x^2}{\rho^2}} = \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}$$

et enfin

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Richard, à Agen; Michel, à Montpellier: Viélajus, à Bordeaux; Bèche, à Tulle.

QUESTION 91

Solution par M. E. FESQUET, Lycée de Nîmes.

On donne un point fixe O, *et une droite fixe* AB; *pour chaque point* P *de* AB, *on prend normalement à* AB, PM $= \lambda$. OP, λ *étant une constante. Quel est le lieu du point* M, *et quel est le problème simple de géométrie descriptive que l'on peut regarder comme l'origine du problème actuel?*

L'analyse conduit immédiatement à l'équation du lieu. En prenant pour axes AB et la perpendiculaire élevée par O sur AB, l'équation du lieu est:

$$y = \pm \lambda\sqrt{x^2 + a^2}$$

ou

$$y^2 - \lambda^2x^2 - a^2\lambda^2 = 0,$$

équation d'une hyperbole rapportée à ses axes. Les sommets réels sont sur Oy.

Considérons la figure comme une épure de géométrie descriptive. Soit AB la ligne de terre; considérons (O'M, OP) comme les projections d'une droite; nous sommes ramenés à chercher le lieu des traces verticales de ces droites. Rabattons OP, O'M autour de OP; l'angle POM est l'angle de la droite avec le plan horizontal; or:

$$\operatorname{tg} POM_1 = \frac{PM_1}{OP} = \frac{PM}{OP} = \lambda.$$

Donc tg POM_1 et par suite POM_1 est constant; l'angle de (O'M, OP) avec le plan horizontal est constant; il en est de même de l'angle de la droite avec la verticale du point O. La droite décrit donc un cône de révolution autour de la

verticale du point O, et le lieu des points tels que M est l'intersection du cône par le plan vertical. C'est une hyperbole, puisque le plan vertical est parallèle à l'axe de révolution.

Cette remarque donne quelques propriétés du lieu. Ainsi pour avoir la tangente en M, il suffit de mener par O une perpendiculaire sur OP, et de joindre le point d'intersection α de cette perpendiculaire avec AB au point M. Cela résulte immédiatement de la construction de la tangente en un point de la section.

Pour avoir les asymptotes, il suffit de mener par le point O' deux droites faisant avec Oy le complément de l'angle POM_1.

Remarque. — A peu près toutes les épures de géométrie descriptive donnent lieu à un problème de géométrie pure. Par exemple la propriété du plan bitangent au tore de couper celui-ci suivant deux cercles, permet de résoudre immédiatement le problème suivant (*).

Étant donnés deux cercles égaux C et C'; on mène une tangente commune intérieure EF, et par un point P quelconque de EF une parallèle à la ligne des centres C, C'. Cette parallèle rencontre chaque cercle aux points A, A' et B, B'. On élève PM perpendiculaire sur EF, et on prend sur cette droite deux longueurs PM, PM' telles que l'on ait

$$\overline{PM}^2 = PA \cdot PB$$
$$\overline{PM'}^2 = PA' \cdot PB'.$$

Le lieu des points M et M' ainsi définis se compose de deux circonférences.

La solution analytique de ce problème pourra peut-être intéresser les lecteurs du *Journal de Mathématiques spéciales*.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 94

Solution par M. PAUL BOURGAREL, élève de Mathématiques spéciales à Antibes.

Démontrer, au moyen des relations entre les coefficients et les racines, que la condition :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

exprime que les racines de l'équation :

$$Ax^4 - 4Bx^3 + 6Cx^2 - 4Dx + E = 0 \qquad (2)$$

sont en proportion harmonique, c'est-à-dire sont liées par la relation :

$$2(\alpha\beta + \gamma\delta) = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta).$$

Les relations entre les coefficients et les racines nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= \frac{4B}{A} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta &= \frac{6C}{A} \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta &= \frac{4D}{A} \\ \alpha\beta\gamma\delta &= \frac{E}{A} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Pour obtenir la condition cherchée, il faut éliminer α, β, γ, δ entre la relation (2) et les relations (3).

Posons

$$\alpha\beta = m$$
$$\gamma\delta = n$$
$$\alpha + \beta = p$$
$$\gamma + \delta = q.$$

Les relations précédentes deviennent :

$$2(m + n) = pq.$$
$$p + q = \frac{4B}{A}$$

$$m + pq + n = \frac{6C}{A}$$

$$mq + np = \frac{4D}{A}$$

$$mn = \frac{E}{A}$$

relations qui peuvent s'écrire :

$$m + n = \frac{2C}{A} \qquad (4)$$

$$p + q = \frac{4B}{A} \qquad (5)$$

$$pq = \frac{4C}{A} \qquad (6)$$

$$mq + pn = \frac{4C}{A} \qquad (7)$$

$$mn = \frac{E}{A}. \qquad (8)$$

Nous sommes donc ramenés à éliminer m, n, p, q entre les relations (4), (5), (6), (7) et (8).

Dans (8) portons la valeur de n tirée de (4) et dans (6) portons la valeur de q tirée de (5); nous obtenons ainsi les deux équations :

$$Am^2 - 2Cm + E = 0 \qquad (9)$$

$$Ap^2 - 4Bp + 4C = 0. \qquad (10)$$

Puis dans (7) portons les valeurs de q et de n tirées des équations (4) et (5); nous obtenons ainsi :

$$2Bm - Apm + Cp - 2D = 0. \qquad (11)$$

Enfin dans l'égalité (10) transportons la valeur de p tirée de (11); nous obtenons :

$$A(B^2 - AC)m^2 - 2C(B^2 - AC)m + 2BCD - AD^2 - C^3 = 0.$$

Eliminons enfin m entre cette dernière équation et l'équation (9); l'élimination est immédiate et l'on trouve :

$$ACE - EB^2 - AD^2 + 2BCD - C^3 = 0,$$

c'est-à-dire précisément le développement du déterminant (1).

QUESTION 96

Solution, par M. A. LEBLOND, élève de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

On considère une strophoïde droite S ; *par le sommet de la courbe, son point double, et un point* M *mobile sur* S, *on fait passer une circonférence* Δ ; *enfin par* M *on mène une parallèle à l'asymptote de* S, *et cette parallèle rencontre* Δ *en un point* I. *Trouver le lieu de ce point.*

Ce lieu est une circonférence ; on donnera, après la solution analytique de ce problème, une démonstration géométrique du résultat trouvé. (G. L.)

Soit la strophoïde $y^2 = x^2 \dfrac{R + x}{R - x}$.

Soient α, β les coordonées d'un point I du lieu et α, y, celles du point M de la strophoïde auquel il correspond. Exprimons que ces deux points sont, avec l'origine et le sommet de la courbe, sur un même cercle, nous aurons :

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + y^2 & \alpha & y \\ \alpha^2 + \beta^2 & \alpha & \beta \\ R^2 & -R & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en remplaçant la première ligne par le résultat obtenu en retranchant les éléments de la seconde de ceux de cette première, puis en supprimant le facteur $R(y - \beta)$:

$$\begin{vmatrix} y + \beta & 0 & 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 & \alpha & \beta \\ R & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

D'où :

$$y = \alpha \frac{R + \alpha}{\beta}$$

substituant dans la relation $y^2 = \alpha^2 \dfrac{R + \alpha}{R - \alpha}$, nous aurons, en supprimant les facteurs singuliers α^2 et $R + \alpha$:

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soient A le sommet et B l'intersection de AM et de Oy. (Le lecteur est prié de faire la figure.) Supposons le point M d'abscisse positive. Alors, on a : $AIO = OMB$ comme ayant même mesure et $AOI = OBM$ par suite des égalités d'angles suivantes :

$$AOI = AOM + MOI = AIM + MAI = 180^\circ - AMI = OBM$$

Les triangles OAI, OBM sont donc semblables ; on le démontrerait d'une façon analogue si M était d'abscisse négative. Mais le point M appartenant à la strophoïde, OBM est isoscèle, OAI l'est donc aussi. Donc $OI = OA$. C. Q. F. D.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Simon, au collège Chaptal; Callé, à Grenoble; Bourgarel, à Antibes ; Bèche, à Tulle; Martin, à Nice; Richard, à Agen; Clément, à Rouen; Beaúmenu, à Moulins; Houdry, à Melun.

QUESTION 97

Solution par M. Léon Clément, élève au Lycée de Rouen.

Soit M *un point d'un strophoïde ayant pour sommet* O *et pour point double* O'. *Du point* O' *comme centre avec* O'O *pour rayon décrivons un cercle* Δ. *Si du point* M *on abaisse une perpendiculaire sur* OO', *cette droite rencontre* Δ *en deux points, parmi lesquels on distinguera particulièrement le point* H *qui jouit de la propriété que* $MH = MO$.

1° Reconnaître l'exactitude de cette proposition ;

2° Démontrer que si les perpendiculaires à OM, *au point* O, *et les tangentes en* H *à* Δ *se coupent en* T, TM *est la tangente à la strophoïde ;*

3° Démontrer que si l'on prend $MH' = MH$, *le lieu du point* H' *est un cissoïde;*

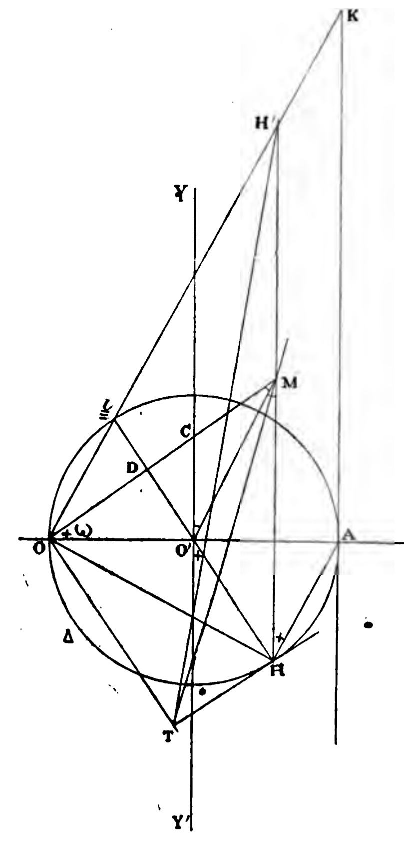
4° Reconnaître que la tangente au point H' *à la cissoïde passe, elle aussi, par le point* T; *et faisant alors abstraction de la strophoïde considérée d'abord, déduire des remarques précédentes une construction de la tangente à la cissoïde.* (G. L.)

1° Menons O'M, et soit C le point d'intersection de OM avec la perpendiculaire O'Y à OO'. On a CM = CO'; par suite CMO' = CO'M. Or CO'M = O'MH comme alternes-internes.

Donc

$$CMO' = O'MH.$$

Donc les droites MH, MO sont symétriques par rapport à MO', et parconséquent un des points d'intersection H de MH avec la circonférence Δ est tel que MH = MO. Ce point H est le symétrique du point O par rapport à MO'; il en résulte que pour tous les points de la strophoïde situés dans l'angle YO'X et son opposé par le sommet, le point H est sur la partie de la circonférence située au-dessous du diamètre OO'. Pour les autres points de la courbe, le point H est sur la partie supérieure de la circonférence Δ.



2° Menons le rayon HO' et prolongeons-le jusqu'à sa rencontre en D avec OM. A cause de la symétrie par rapport à MO', les deux angles MOO', MHO' sont évidemment égaux. Mais MHO' = HO'Y' comme alternes-internes. Donc MOO' = HO'Y'. Ceci démontre que HO' est perpendiculaire sur OM. Si donc on appelle ω l'angle MOX, on a :

$$OT = HD = HO' + O'D = a\,(1 + \sin \omega).$$

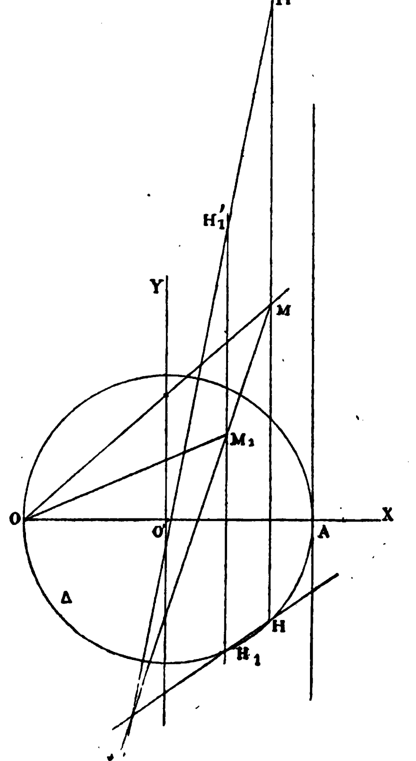
Or l'équation polaire de la strophoïde, O étant le pôle et OX l'axe polaire, est :

$$\rho = \frac{a(1 + \sin \omega)}{\cos \omega}.$$

La sous-tangente d'un point de la courbe a pour expression $\frac{\rho^2}{\rho'_\omega}$, c'est-à-dire :

$$a(1 + \sin \omega).$$

Donc OT est la sous-tangente du point M. Donc TM est la tangente.



On peut déduire de là un moyen assez commode de mener une tangente à la strophoïde par un point situé sur la courbe.

3° Menons OH, OH' ; OH' rencontre la circonférence Δ en un point I, et l'asymptote de la strophoïde en un point K. Joignons le point H au point A symétrique de O par rapport à O'.

De ce que MH = MH' = MO, on en conclut que l'angle H'OH est droit; donc le point I se trouve sur le diamètre HO', et par suite AH est égal et parallèle à OI; il en résulte que OI = H'K, car ces deux longueurs sont égales à AH.

Le lieu du point H est donc une cissoïde ayant le point O pour point de rebroussement, et AK pour asymptote.

4° Considérons deux points de la strophoïde M, M_1 voi-

sins l'un de l'autre. Soient H', H'_1, les points correspondants de la cissoïde, et H, H_1, les points correspondants de Δ.

M étant le milieu de H'H, et M_1 le milieu de H'_1 H_1, les trois droites HH_1, MM_1, $H'H'_1$ sont concourantes.

Supposons que le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M jusqu'à venir se confondre avec lui. A la limite le point H_1 se confond avec le point H, et le point H'_1 avec le point H'. Donc la tangente en H à la cissoïde passe par le point d'intersection T de la tangente en M à la strophoïde avec la tangente en H à la circonférence Δ.

Pour mener la tangente à la cissoïde par un point H' de la courbe, on joindra au point O' le point d'intersection I de OH' avec Δ. On déterminera le second point d'intersection H de IO' avec Δ. Au point H on mènera la tangente à Δ, et on abaissera du point O une perpendiculaire OT sur cette tangente. En joignant le point T au point H' on aura la tangente cherchée.

Nota. — La même question a été résolue par M. Marzarit, à Angoulême.

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Algèbre.

Note sur quelques inégalités, par M. *Laguerre*. . 3
Note d'analyses, par M. *Réalis* 6
La multiplication des déterminants, par M. *Walecki*. 8
Note sur les combinaisons complètes, par M. *Walecki* 9
Sur l'équation du quatrième degré, par M. *Le Pont*. 10
Sur une nouvelle espèce de fractions continues (suite), par M. *de Longchamps* 25, 49
Sur la somme des sinus ou cosinus de trois arcs dont la somme est un multiple de la demi-circonférence, par M. *Fouret*. . 53
Sur un mémoire de M. Landry, par M. *de Longchamps*. 73, 97
Elimination par la méthode de Bezout, par M. *Amigues* 101
Note d'analyse récurrente, par M. *Levavasseur* . 109, 127
Sur la décomposition des polynômes homogènes du second degré en sommes de carrés, par M. *Kœhler*. 185, 209
Note d'Algèbre, par M. *Amigues* 224

Géométrie analytique.

Note sur la droite de Simson, par M. *Weill* 11, 30, 58
Construction du centre d'une hyperbole équilatère, par M. *Niewenglowski*. . . . 78
Sur le Limaçon de Pascal, par M. *Hadamard*. . . . 80
Note sur un théorème de Joachimsthal 83
Problème sur l'ellipse, par M. *Giat* 105
Applications nouvelles des transversales réciproques, par M. *de Longchamps* 121, 145
Concours général de 1884, par M. *Fontiné*. 153
Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, par M. *de Longchamps*. 169
Note sur l'ellipsoïde, par M. *Ed. Lucas*. 178
Représentation plane des quadriques, par M. *de Longchamps* 193, 217, 241 265
Hyperbole des neuf points, par M. *Brocard* 197

Questions d'examen.

Concours de l'École polytechnique 158
Concours de l'École normale supérieure 160
Questions d'examens oraux pour l'Ecole polytechnique. 161, 182, 214
Question des bourses de licence 190
Concours d'agrégation. . . 259
Concours pour l'Ecole centrale, première session . 261

Questions proposées.

Questions	88 à 93 . . .	23
—	94 à 103 . . .	46
—	104 à 120 . . .	70
—	121 . . .	96

Pages.
Question 122 . . . 119
— 123 à 131 . . . 142
— 132 à 137 . . . 166
— 138 à 144 . . . 190
— 145 à 146 . . . 216
— 147 à 150 . . . 239

Solution de questions proposées.

Question 23 par M. *Clément* 63
— 51 par M. *Clément* 86
— 56 par M. *Corot* . 89
— 57 par M. *Callé*. . 163
— 58 par M. *Gindre*. 19
— 59 par M. *Callé*. . 35
— 60 par M. *Giat*. . 113
— 60 par M. *Callé*. . 117
— 61 par M. *Clément* 91
— 65 par M. *de Kerdrel* 232
Note sur cette question, par M. *Kœhler* 234
Question 68 par M. *Saillard* 135
— 69 par M. *Saillard* 139
— 72 par M. *Lemoine* 273
— 72 par M. *Génin* . 275
— 75 par M. *Saillard* 247
— 76 par M. *Davoine* 250
— 88 par M. *Simonot* 278
— 89 par M. *Bieules*. 235
— 91 par M. *Fesquet* 280

Pages.
Question 94 par M. *Bourgarel* 282
— 96 par M. *Leblond* 284
— 97 par M. *Clément* 285

Mélanges.

Variétés sur l'équation du quatrième degré, d'après M. *Sélivanof* 17
Extrait d'une lettre de M. *Realis* à M. *de Longchamps*. 18
Eléments de la théorie des déterminants, par M. *Mansion*. Compte rendu par M. *G. de Longchamps* . . 22
Extrait d'une lettre de M. *Niewenglowski* à M. *de Longchamps*. 45
La méthode d'approximation de *Newton*. 67
Erratum sur la question 89. 72
Erratum sur l'article de M. *Fouret* 96
Avis sur l'envoi des solutions. 120
Extrait d'une lettre de M. *Mansion* à M. *de Longchamps*. 142
Extrait d'une lettre de M. *Hadamard* à M. *de Longchamps*. 226

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

AMIGUES, *professeur à Marseille*, 48, 70, 101, 143, 190, 216, 222.
AMOUROUX, *à Grenoble*, 22.
AZÉMA, *lycée Henri IV, à Paris*, 24.
BEZOUT, 101.
BIEULES, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 235.
BOQUEL, *rédacteur*, 47.
BROCARD, *capitaine du génie*, 197.
CALLÉ, *à Grenoble*, 35, 116, 163.
CATALAN, *professeur à Liége*, 72.
CLÉMENT, *à Rouen*, 63, 86, 91.
COLLIN, *à Dijon*, 96.
COROT, *à Troyes*, 22, 89.
COULOM, *collège Chaptal, à Paris*, 89.
DAVOINE, *lycée Charlemagne, à Paris*, 250.
FERVAL, *lycée Henri IV, à Paris*, 22.
FONTENÉ, *professeur au collège Rollin*, 133.
FOURET, *répétiteur à l'École Polytechnique*, 53, 71.
GIAT, *à Moulins*, 22, 45, 105, 113.
GINDRE, 19, 96.
HADAMARD, *lycée Louis-le-Grand, à Paris (reçu le premier à l'École Polytechnique et à l'École Normale)*, 80, 226, 240.
HALPHEN, *examinateur à l'Ecole Polytechnique*, 180, 181.
JOACHIMSTHAL, 83.
KERDREL (de), *à Keruzoret*, 22, 45, 232.
KOEHLER, 185, 209, 234.
LAGUERRE, *examinateur à l'École Polytechnique*, 3, 46, 142, 192.
LAILLARD, *collège Chaptal, à Paris*, 96.
LANDRY, 73, 97.
LAPINTE, *à Bar-le-Duc*, 119.
LEMOINE, *ancien élève à l'Ecole Polytechnique*, 70, 167, 168.
LEVAIRE, *à Plaisance*, 22.
LEVAVASSEUR, *élève à l'École Normale supérieure*, 109, 127.
LÉVY, *professeur au lycée Louis-le-Grand*, 72, 96, 190.
LONGCHAMPS (de), *rédacteur*, 22, 23, 25, 46, 49, 73, 97, 120, 121, 143, 145, 167, 169, 192, 193, 216, 217, 240, 241, 245.
LUCAS, *professeur au lycée Saint-Louis*, 178, 182.
MANNHEIM, *professeur de l'École Polytechnique*, 179, 181.
MANSION, *professeur à Gand*, 22.
NEWTON, 67.
NIEWENGLOWSKI, *professeur au lycée Louis-le-Grand*, 45, 78.
PONCET, *à Lyon*, 119.
LE PONT, 10.
PORNAY, *à Toulouse*, 22.
RAT, *à Marseille*, 89.
RÉALIS, *professeur à Turin*, 6, 19, 191.
ROUSSEL, *à Lyon*, 119.
SAILLARD, *collège Chaptal, à Paris*, 135, 139, 247.
SIMONET, *à Lyon*, 239.
VAZEILLE, *rédacteur*, 23, 24, 46, 71, 239, 240.
VOIGNIER, *à Nancy*, 158.
WALECKI, *professeur au lycée Condorcet*, 8, 9.
WEILL, *professeur au collège Chaptal*, 11, 30, 57, 143, 144.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 28996-4.